

2010 年度前学期数学演習 3 類 (P クラス) 線形代数 期末テスト

- 教科書類の参照禁止
- 答案用紙の回収枚数が確認されるまで退出禁止
- 解答時間は 70 分間
- 結果だけでなく計算過程も示すこと
- (test-1),(test-2) は答案用紙の 1 枚目に解答し、それ以降は各問 1 枚ごとに解答すること (合計 5 枚である)
- 各枚ごとに裏面を使用するときは、裏面に続くことを明示すること

(test-1) 次の計算結果を $\text{rank } A$ を用いて表現せよ。(例: $\text{rank}[A \quad A] = \text{rank } A$)
この問題のみ、結果だけを示してもよいこととする。

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \text{rank}[A \quad -A] \quad \text{(ii)} \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \quad \text{(iii)} \text{rank}[^t A] \\ & \text{(iv)} \text{rank} \begin{bmatrix} -A & A \\ A & -A \end{bmatrix} \quad \text{(v)} \text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(test-2) 行列 X, Y が正則であるとき、その積 XY が逆行列を持つことを示せ。
(test-3) 次の連立方程式を解け。ただし、 a, b は定数である。

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ x + (a+1)z = -a + b + 1 \\ -2x - 3y + z = -5 \end{cases}$$

(test-4) 次の行列の行列式を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

(test-5) 次の行列が正則であるか判断せよ。また、正則となる場合については逆行列を求めよ。ただし、 a, b, c は定数である。

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & b & 0 \\ 1 & -1 & c \end{pmatrix}$$

(test-6) 次の連立方程式を クラメールの公式 を用いて解け。

$$\begin{cases} 4x - y - 3z = 3 \\ 2x - 2y - z = -2 \\ -x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

問題は以上。

答案の返却について：数学事務室 (本館 3 階 332B) にて、7 月 30 日から 8 月 5 日 (予定) に答案を返却します。返却開始は演習のウェブページ (<http://www.is.titech.ac.jp/makoto/class.html>) でアナウンスします。

略解

(test-1) (各 4 点の計 20 点)

(i)rank A , (ii)rank A , (iii)rank A , (iv)rank A , (v) $2 \times \text{rank}A$

(test-2) (10 点)

X, Y が正則であるから、 $|X| \neq 0, |Y| \neq 0$ であり、 $|XY| = |X||Y| \neq 0$ である。よって、 XY は正則であり、逆行列を持つ。

(test-3) (20 点, ただし計算ミスで -5 点, 分類 [場合分け] が正しくない場合は -10 点)

(Case 1) $a \neq 0$ のとき、 $x = 2 - b/a, y = b/a, z = b/a - 1$

(Case 2) $a = b = 0$ のとき、実数 λ で、 $x = 1 - \lambda, y = 1 + \lambda, z = \lambda$

(Case 3) $a = 0, b \neq 0$ のとき、解を持たない。

(test-4) (15 点で、少しの計算ミスは -5 点、大きな計算ミスは -10 点)

-18

(test-5) ((i) は 5 点, (ii) は 10 点で (ii) のみ計算ミスで -5 点, 分類ミスで -5 点)

(i) 行列式が 0 であるため、正則ではない。

(ii) 行列式が abc であるため、 $abc = 0$ で正則ではない。 $abc \neq 0$ のとき、逆行列は

$$\frac{1}{abc} \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ c & ac & 0 \\ 1-b & a & ab \end{pmatrix}$$

(test-6) (20 点で、 x, y, z にそれぞれ簡単なミス程度なら各 -5 点)

$x = -55/5, y = -13/5, z = -74/5$