

2010 年度前学期数学演習 3 類 (P クラス) 第 11 回演習問題

注: 7 月 16 日は、演習の線形代数の期末テストを行います。

1. 教科書類の持込禁止
2. 試験は演習を行っている教室で行う (13 時 20 分には着席のこと)
3. 3×3 の行列の逆行列、および 4×4 の行列の行列式は必ず出すのでよく復習しておくこと
4. 他に、行列の階数の求めかたとその性質、解が一意でない連立方程式、クラメル公式が重要な項目である
5. 質問がある場合には、数学相談室や山下まで相談に来てください (先に Makoto.Yamashita@is.titech.ac.jp にメールをください)。ただし、山下への相談は 7 月 12 日 以降のみ。

- (11-1) この問題を解答用紙に解答すること
行列 A, B, C が

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

このとき、以下の値を計算せよ。(Hint: 行列積を求める必要はない。)

$$\begin{array}{llllll} \text{(i)} & |AB| & \text{(ii)} & |BC| & \text{(iii)} & |CA| & \text{(iv)} & |BA| & \text{(v)} & |CB| & \text{(vi)} & |AC| \\ \text{(vii)} & |A^{-1}| & \text{(viii)} & |B^{-1}| & \text{(ix)} & |C^{-1}| \end{array}$$

なお、今回は $|A|, |B|, |C|$ の絶対値が一桁になるようにわざと A, B, C を作ってあるが、期末テストのときにはもっと難しい行列式計算になる予定である。

- (11-2) クラメル公式により、以下の連立方程式を解け。(Hint: 教科書 P70 定理 3.21, P71 例 24)

$$\text{(i)} \begin{cases} 4x + 3y = -2 \\ 5x + 6y = 1 \end{cases} \quad \text{(ii)} \begin{cases} 4x + z = 0 \\ 6x - y + z = -1 \\ -5x - 5y - 4z = -2 \end{cases} \quad \text{(iii)} \begin{cases} 3x - 2y - 5z = -3 \\ 7x - 4y - 7z = -8 \\ -5x + 3y - 7z = -5 \end{cases}$$

これは、演習時間内の板書については、計算するべき行列式を書けばよく、行列式の計算過程は書かなくてもよいこととする。

- (11-3) 次のことを示せ。

- (i) 行列 X は三角行列であり、対角要素 $X_{11}, X_{22}, \dots, X_{nn}$ はすべて 0 ではない。このとき、 X は逆行列を持つことを示せ。
(Hint: 教科書 P61 定理 3.9)
- (ii) 行列 X, Y がそれぞれに逆行列を持つとき、それらの積 XY と YX がそれぞれ逆行列を持つことを示せ。
- (iii) 行列 X が直交行列であるとき (つまり ${}^tXX = I$ あるいは $XX^t = I$)、 $|X|$ を求めよ。

- (11-4) 次の関数 $D(x)$ を x で微分せよ。

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \end{vmatrix}$$

(Hint: 行列式の微分は、各行を微分した行列式の和になる。)

略解

(11-1) $|A| = 6, |B| = -1, |C| = -6$ である。よって、

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & -6 & \text{(ii)} \quad 6 \quad \text{(iii)} \quad -36 \\ \text{(iv)} & -6 & \text{(v)} \quad 6 \quad \text{(vi)} \quad -36 \\ \text{(vii)} & 1/6 & \text{(viii)} \quad -1 \quad \text{(ix)} \quad -1/6 \end{array}$$

(11-2)

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & x = -15/9, y = 14/9 \quad \text{(ii)} \quad x = 3, y = 7, z = -12 \\ \text{(iii)} & x = -115/26, y = -186/26, z = 21/26 \end{array}$$

(11-3) (i) $|X| = X_{11} \cdot X_{22} \cdots X_{nn}$ であるから、 $|X| \neq 0$ であり、逆行列を持つ。

(ii) $|XY| = |X||Y|$ より、 $|X| \neq 0, |Y| \neq 0$ であるから、 $|XY| \neq 0$ となり、逆行列を持つ。

(iii) $|{}^tXX| = |{}^tX||X| = |X||X| = |X|^2$ であり、 $|I| = 1$ である。したがって、 $|X| = 1$ または $|X| = -1$ である。

(11-4) 行列式の微分は、各行を微分した行列式の和になる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}D(x) &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}1 & \frac{d}{dx}1 & \frac{d}{dx}1 \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & f'_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{d}{dx}f_1(x) & \frac{d}{dx}f_2(x) & \frac{d}{dx}f_3(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & f'_3(x) \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ \frac{d}{dx}f'_1(x) & \frac{d}{dx}f'_2(x) & \frac{d}{dx}f'_3(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f''_1(x) & f''_2(x) & f''_3(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ここで、第1項は第1行が0だけになるので行列式も0となり、第2項は第2行と第3行が同じになるので0となる。