

2010 年度前学期数学演習 3 類 (P クラス) 第 10 回演習問題

- (10-1) この問題の (iv) までを解答用紙に解答すること
つぎの極限値を求めよ。(Hint: l'Hopital の定理, P90 例 4)

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} & \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} & \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \\ \text{(iv)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} & \text{(v)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} & \text{(vi)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{array}$$

- (10-2) 注: この問題の類似問題を演習の期末テストに出す予定である。
2 変数関数 $f(x, y)$ が $(x, y) = (x_0, y_0)$ で極限値 ℓ を持つとは、 $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) = \ell$ と表現されるが、 $\epsilon - \delta$ で表現すれば

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \epsilon$$

となる。ここで、 d は距離関数であればよいが、一番簡単な例はユークリッド距離である。
(つまり、 $d((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ が簡単な例である。)
このとき重要なことは、 (x, y) が (x_0, y_0) にどのような近づきかたをしても、limit が同じ値ということである。

- (i) 関数 $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ が $(x, y) = (0, 0)$ で極限値を持つことを示せ。
(Hint: $2|xy| \leq x^2 + y^2$ が常になりたつ)
(ii) 関数 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ が $(x, y) = (0, 0)$ で極限値を持たないことを示せ。
(Hint: 直線 $y = mx$ 上の (x, y) が $(0, 0)$ に近づく様子を考えよ)
(iii) 関数 $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ が $(x, y) = (0, 0)$ で極限値を持たないことを示せ。

- (10-3) 次の不等式を証明せよ

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \frac{2}{\pi}x < \sin x < x & (0 < x < \frac{\pi}{2}) \\ \text{(ii)} \quad x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x & (x > 0) \end{array}$$

Hint: (i) については、 $f(x) = x - \sin x$ の $x > 0$ における極値を考えよ。また、 $g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ については、 $g(0), g(\frac{\pi}{2})$ の値と $g''(x)$ の値 (ただし $0 < x < \frac{\pi}{2}$) からグラフを書いて考察すれば解かる。

略解

(10-1)

$$(i) \quad \frac{1}{6} \quad (ii) \quad \log \frac{a}{b} \quad (iii) \quad 1 \quad (iv) \quad -\frac{e}{2} \quad (v) \quad \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (vi) \quad 0$$

(10-2) (i) $f(x, y) \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ より、 $\delta = 2\epsilon$ とすれば、極限值 0 を持つことを示すことができる。

(ii) $y = mx$ の場合、 $f(x, y) = \frac{m}{1+m^2}$ となり、 m に依存してしまう。

(iii) $x = my^3$ の場合、 $f(x, y) = \frac{m}{1+m^3}$ となり、 m に依存してしまう。

(10-3) (i) は略。 (ii) は $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ とすると、 $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ であり、 $f''(x) = x - \sin x$ となる。このとき、 $x > 0$ で $\sin x < x$ を示してあると、 $f''(x) > 0$ が $x > 0$ でわかる。また、 $f'(0) = 0$ より、 $x > 0$ で $f'(x) > 0$ となる。さらに $f(0) = 0$ より、 $x > 0$ で $f(x) > 0$ が示される。