2010/06/11

2010年度前学期数学演習３類（Ｐクラス）第８回演習問題

注:6 月 18 日の線形代数の演習では、線形代数の小テストを行います。突発的な理由で欠席する場合は、6 月 25 日までに理由を説明できる書類をもって、連絡をしてきてください。

(8-1) この問題の (a) までを解答用紙に解答すること

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, $x_0 = 2$ について

i. 1 次の Taylor 展開 $f^{[1]}(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$ を求めよ。

ii. 2 次の Taylor 展開 $f^{[2]}(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$ を求めよ。

iii. 3 次の Taylor 展開 $f^{[3]}(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{'''}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$ を求めよ。

iv. $f^{[1]}(x)f^{[2]}(x), f^{[3]}(x)$ をプロットせよ。

(b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ として、上の i,ii,iii を答えよ。

(8-2) (a) $f(x) = \tan^{-1}(x)$ とする。

i. $f'(x), f''(x)$ を求めよ。

ii. $(1 + x^2)f'(x) = 1$ の両辺を n 回微分せよ。ただし、Leibniz の公式より

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 f(x)) = x^2 f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x)$$

である。

iii. $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

iv. $f(x)$ を Maclaurin 展開せよ。($f(x) = \tan^{-1}(x)$ の剰余項は $x \in (-1, 1)$ で 0 に収束するため、無限級数に展開できる。)

(b) $f(x) = \log(1 + x)$ を Maclaurin 展開せよ。($f(x) = \log(1 + x)$ の剰余項も 0 に収束するため、無限級数に展開できる。) Hint: 演習問題 (6-3)

(8-3) 次の関数について、$n - 1$ 次までの Maclaurin 展開とその Lagrange 剰余項を求め、Lagrange 剰余項が $n \to \infty$ で 0 に収束することを示せ。

(a) e^x

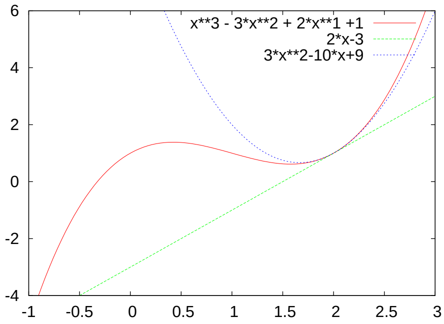
(b) $\frac{1}{1+x}$ ただし $0 < x < 1$

(c) $\sin(x)$ [$2n - 1$ 次まで展開すること]

Hint: P76 の (19) 式で $a = 0$ を考える。

略解

(8-1) (a) $f^{[1]}(x) = 2x-3, f^{[2]}(x) = 3x^2-10x+9, f^{[3]}(x) = x^3-3x^2+2x+1$



(b) $f^{[1]}(x) = 1+x, f^{[2]}(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}, f^{[3]}(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$

(8-2) (a)

i. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

ii. $\frac{d^n}{dx^n}((1+x^2)f'(x)) = (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$

iii. $f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0)$ と $f'(0) = 1, f''(0) = 0$ より、$f^{(2m)}(0) = 0, f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!$

iv. $\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \cdots$

(b) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$

(8-3) (a) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}x^n}{n!}$

(b) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n\frac{x^n}{(1+\theta x)^{n+1}}$

(c) $\frac{d^n}{dx^n}\sin(x) = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ より

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$