2010/06/04

2010年度前学期数学演習３類（Ｐクラス）第７回演習問題

1. ６月１８日の最初の 30 分間で小テストを行います。
   教科書類の持込禁止です。特に (1-2),(3-1),(5-1),(5-2),(7-1) をよく復習しておくこと。
2. 気がついている人が少ないようですが、この演習の略解は
   http://www.is.titech.ac.jp/~makoto/class.html#2010-P
   からダウンロードできます。ただし、詳細ではないので、分からない点があるときには、相談に来るなどしてください。

いくつかの問題は、参考書からの引用、またはその改である。

(7-1) この問題の (iii) までを解答用紙に解答すること
次の行列が正則かどうか判断し、正則であれば逆行列を求めよ。
(Hint: 教科書 P39 の例 7, 計算過程を見直せるように基本変形をメモとして残すことを薦める)
(vii),(viii) は授業時間内には扱わないので、各自勉強しておくこと (授業時間が余った場合には、板書・発表とする)

$$\text{(i)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iv)}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(v)}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(vi)}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(vii)}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(viii)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(7-2) 次の 3 つの連立方程式を解け。
(基本変形を用いてもよいし、(7-1) の (iv) の結果を用いてもよい。)

$$\text{(i)}\begin{cases} 2x_{11}+(-1)x_{21}+1x_{31} &= 1 \\ -2x_{11}+0x_{21}+(-1)x_{31} &= 0 \\ 2x_{11}+(-2)x_{21}+0x_{31} &= 0 \end{cases} \quad \text{(ii)}\begin{cases} 2x_{12}+(-1)x_{22}+1x_{32} &= 0 \\ -2x_{12}+0x_{22}+(-1)x_{32} &= 1 \\ 2x_{12}+(-2)x_{22}+0x_{32} &= 0 \end{cases}$$

$$\text{(iii)}\begin{cases} 2x_{13}+(-1)x_{23}+1x_{33} &= 0 \\ -2x_{13}+0x_{23}+(-1)x_{33} &= 0 \\ 2x_{13}+(-2)x_{23}+0x_{33} &= 1 \end{cases}$$

注:行列 $\boldsymbol{X}$ の (i,j) 要素を x_{ij} とすると、$\boldsymbol{X}$ は (7-1) の (iv) の逆行列になる。このことは、ベクトル空間の性質として今後学習する際にも触れることになる。

(7-3) 次の行列を基本行列の積として表し、逆行列を求めよ。(Hint: 教科書 P38 の定理 2.7, 問 14, PP22-24, 逆行列については P39 の注意, P24 の定理 2.1)

$$\text{(i)}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

裏面に続く

(7-4) 下三角行列が逆行列を持つとき、逆行列も下三角であることを示せ。ただし、行列 $\boldsymbol{X}$ が下三角であるとは、$i < j$ となる i, j について $X_{ij} = 0$ であることであり、つまり行列の上三角 (対角を含まない) が 0 になっていることである。

(Hint: $\boldsymbol{X}$ が $n \times n$ 正方行列のとき、下三角行列 $\boldsymbol{X}$ を $P^1 P^2 \cdots P^k$ と基本行列の積で表したとき、各 $P^1, \ldots, P^k$ を $P_i(c)$[ただし $i = 1, ..., n$] または $P_{ij}(c)$[ただし $1 \leq j < i \leq n$] の形で表すことができるような基本行列の積にできる。)

注: 上三角行列の逆行列も上三角行列であることが同様に示せる。また、この性質を使うと、三角行列の逆行列が正しく計算できているかの目安のひとつとなる。つまり、(7-3) の (iii) の逆行列が下三角行列なのは偶然ではない。

略解

(7-1)

$$\text{(i)}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\begin{pmatrix} 1/6 & -1/12 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{(iii) 正則ではない}$$

$$\text{(iv)}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(v) 正則ではない} \quad \text{(vi)}\begin{pmatrix} -4 & 15 & -5 \\ 3 & -11 & 4 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(vii)}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ -2/3 & -1/6 & 5/6 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5/6 & 1/3 & -2/3 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{(viii) 正則ではない}$$

(7-2) (7-1) の (iv) の逆行列から解かる。

(7-3) 基本行列の積としての表現方法は一意ではないため、以下の答え以外にも正答がある。ただし、逆行列は一意である。

(i) $P_{12}(3)P_2(2)$, $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

(ii) $P_1(-1/8)P_{21}(4)P_2(3/2)P_{12}(1/8)$, $\begin{pmatrix} 1/6 & -1/12 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

(iii) $P_{32}(-4)P_{31}(3)P_{21}(-2)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(7-4) $\boldsymbol{X} = P^1P^2\cdots P^k$ としたとき、$\boldsymbol{X}^{-1} = (P^k)^{-1}\cdots(P^2)^{-1}(P^1)^{-1}\boldsymbol{I}$ である。
また、$P_i(c)^{-1} = P_i(1/c), P_{ij}(c)^{-1} = P_{ij}(-c)$ であり、これらの行列を下三角行列に左から掛けるとかならず下三角行列となる。[$P_i(1/c)$ は i 行目を何倍かするだけであるため、0 のところは 0 のままである。また、$P_{ij}(-c)$ は j 行目を $(-c)$ 倍して i 行目に足すため、j 行目で 0 でない列 k は $1 \leq k \leq j$ であって、$1 \leq j < i \leq n$ を考えると、i 行目で変化があるのは $1 \leq k \leq j < i$ となり、i 行目の上三角には影響が出ない。]
さらに、単位行列 $\boldsymbol{I}$ が下三角行列である。これらを踏まえると、$\boldsymbol{X}^{-1}$ は下三角行列である。