2010/05/14

2010年度前学期数学演習３類（Ｐクラス）第４回演習問題

(4-1) この問題は解答用紙に解答すること
次の集合の最小値，最大値，下限，上限を求めよ。(ただし、存在しないこともある点に注意。) また、r は $r \leq 0$ の実数のひとつに固定する。

(i) 閉区間 $[a,b]$,　　(ii) 開区間 (a,b),

(iii) $\left\{\dfrac{n+1}{n} : n \text{ は自然数}\right\}$,　　(iv) $\left\{x : x^2 < x+2, x \text{ は有理数}\right\}$,

(v) 有理数の集合全体,　　(vi) $y = \log(x)$ の $0 < x \leq 1$ の値域,

(vii) $\{r^n : n \text{ は自然数}\}$

(4-2) (教科書 P28, 問５) $0 < r < 1$ のとき $\lim_{k\to\infty} r^k = 0$ を証明せよ。ただし、$0 < r < 1$ について $\{r^k : k \text{ は自然数}\}$ の下限が 0 であることを用いてよい。

(4-3) 次の式を証明せよ。ただし、$M \subset \mathbb{R}$ は空集合ではない集合とし、$k > 0$ である。

$$\sup\{kx : x \in M\} = k \sup M$$

(以下は Hint) M の上界の集合を B とすると、

$$B = \{\beta : \beta \geq x \quad \forall x \in M\}$$

である。$\alpha = \sup M$ とすると、sup の定義より α は B の最小値であるから、(i) $\alpha \in B$ かつ (ii) $\alpha \leq \beta \quad \forall \beta \in B$ である。次に、$\{kx : x \in M\}$ の上界の集合を B' とすると、

$$B' = \{\beta' : \beta' \geq kx \quad \forall x \in M\}$$

である。さらに、

$$\beta \in B \Leftrightarrow k\beta \in B'$$

が成り立つことを用いてよい。
また、別解として教科書 P27 の命題１の必要十分条件を使う方法もある。

(4-4) 教科書 P24 の問１ を証明せよ。つまり、$f : D \to \mathbb{R}$ が連続であるならば $|f|$ も連続であることを示せ。

略解

(4-1) (i) 最小値 a, 最大値 b, 下限 a, 上限 b

(ii) 最小値 なし, 最大値 なし, 下限 a, 上限 b

(iii) 最小値 なし, 最大値 2, 下限 1, 上限 2

(iv) 最小値 なし, 最大値 なし, 下限 -1, 上限 2

(v) 最小値 なし, 最大値 なし, 下限 なし, 上限 なし

(vi) 最小値 なし, 最大値 0, 下限 なし, 上限 0

(vii) $r > 1$ で最小値 r, 最大値 なし, 下限 r, 上限 なし
$r = 1$ で最小値 r, 最大値 r, 下限 r, 上限 r
$0 < r < 1$ で最小値 なし, 最大値 r, 下限 0, 上限 r
$r = 0$ で最小値 0, 最大値 0, 下限 0, 上限 0
$-1 \leq r < 0$ で最小値 r, 最大値 r^2, 下限 r, 上限 r^2
$r < -1$ で最小値 なし, 最大値 なし, 下限 なし, 上限 なし

(4-2) $0 < r < 1$ より、 $r^{k+1} = r \cdot r^k < r^k$ であり単調減少である。また、任意の k で $r^k > 0$ のため、下に有界でもある。このため、収束することがわかる。さらに下限は 0 であるため、$\lim_{k\to\infty} r^k = 0$ である。

(4-3) (i) の $\alpha \in B$ より、$k\alpha \in B'$ である。また、(ii) の $\alpha \leq \beta \quad \forall\beta \in B$ より、$k\alpha \leq k\beta \quad \forall\beta \in B$ であり、$\beta \in B \Leftrightarrow k\beta \in B'$ を用いると、$k\alpha \leq \beta' \quad \forall\beta' \in B'$ が示される。よって、(i') $k\alpha \in B'$ かつ (ii') $k\alpha \leq \beta' \quad \forall\beta' \in B'$ より、$k\alpha$ は B' の最小値である。ゆえに $k\alpha = k \sup M$ は $\{kx : x \in M\}$ の上限となる。
(以下は別解: 教科書 P27 の命題 1 の必要十分条件を使う。)
$\alpha = \sup M$ と置く。このとき、

$$\begin{array}{ll} (A) & \alpha < x \Rightarrow x \notin M \\ (B) & \forall\epsilon > 0, \exists x \in M \text{ s.t. } \alpha - \epsilon < x \leq \alpha \end{array}$$

である。つぎに、$\beta = \sup\{kx : x \in M\}$ と置く。すると、

$$\begin{array}{ll} (A') & \beta < kx \Rightarrow x \notin M \\ (B') & \forall\epsilon' > 0, \exists x \in M \text{ s.t. } \beta - \epsilon' < kx \leq \beta \end{array}$$

よって、 $\beta/k = \alpha$ と置くと、$(A), (B)$ と $(A'), (B')$ が同値であることがわかる。ϵ' と ϵ も $\epsilon'/k = \epsilon$ の関係で結ぶことが出来る。逆に、$\beta/k = \alpha$ でなければ、(B) と (B') を同値にできない。

(4-4) f が連続であるため、$x_k \to x_0$ で $f(x_k) \to f(x_0)$ である。よって、$x_k \to x_0$ で $|f(x_k) - f(x_0)| \to 0$ である。このとき、$||f(x_k)| - |f(x_0)|| \leq |f(x_k) - f(x_0)|$ より、$x_k \to x_0$ で $||f(x_k)| - |f(x_0)|| \to 0$ となる。したがって、$x_k \to x_0$ で $|f(x_k)| \to |f(x_0)|$ であることから $|f|$ も連続である。