数理計画法

－－　最適化のための数理工学　－－

東京工業大学大学院情報理工学研究科

数理・計算科学専攻

小島　政和

興味ある人のために，このスライドは以下のホームページにおいてあります．
http://www.is.titech.ac.jp/∼kojima/wabun.html

はじめに

- 「最初に目的 (目標) があって , 次にその目的を達成するためのより良い手段をとる」ことが“ 最適化 ” の本質
- 普段の生活においても , 他人と話すときでも , 人生設計においても , まず “ 何をやりたいか ” (目標 , 目的) から始める .
- 数理計画は , 最適化ための数理工学 .
- 製品開発・設計 , 工場での生産計画 , 輸送計画 , 航空機とその乗務員の割り当ておよびスケジュ– リング , ファイナンス , 情報通信ネットワ– クの最適利用計画等のさまざまな分野で使われてる .
- そのような分野で生ずる数理計画問題は規模が大きく , 問題の数学的な構造に基づいて効率のよいアルゴリズムを設計し , 高速な計算機を利用しないと解くことが出来ない .
- この講義では , 最適化の必要性 , 簡単な例を通して , 数理計画の基本的な考え方等を概説 .

興味ある人のために , このスライドは以下のホームページにおいてあります .
http://www.is.titech.ac.jp/∼kojima/wabun.html

目次

1. 最適化 (Optimization) とは？
2. “最適化” が必要な例
3. 数理計画法 (Mathematical Programming)
   — 最適化のための数理工学
4. 線形計画問題 (Linear Progrmming)
   — 最も基本的な数理計画モデル
5. “最適化” の背景にある基本的な考え方

Computer Sciecne (計算機科学), 数学

Operations Research (オペレーションズ・リサーチ)

Mathematical Programming (数理計画法)

1. 最適化とは？

目的 — 例えば

学生

- 数学科に入りたい
- 物理学者になりたい
- 商社に入って世界中を駆け回りたい

学科，大学，大学院

- 優秀な学生を集めたい
- 優秀な学生を育てたい

企業 — 数理科学的な方法が有用

- 売り上げをのばしたい
- 生産コストを下げたい

目的を “よりよく” 達成するために何をすればよいのか？何ができるのか？

さまざまな情報

⇓

意思決定者

⇓

手段の選択，決定，行動

高度な情報処理技術— これを支えるのは数学，計算機科学

数理科学的な手法は役に立つか?

- さまざまな目的を達成するための意思決定，特に，組織（企業，大学，病院等）を強力に支援するさまざまな数理科学的な手法が開発されている．
- 万能ではない

2. “最適化” が必要な例

企業の経済活動のさまざまな局面

- 生産計画
- 施設配置，輸送
- 人員配置
- 仕事のスケジューリング
- 投資，金融商品の開発

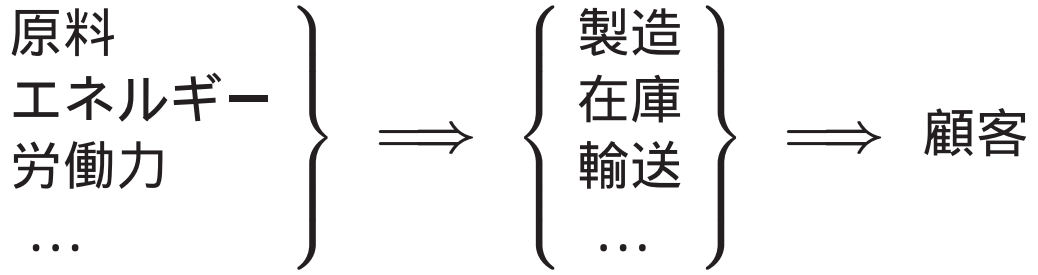
工学分野

- 建造物の構造最適化
- 石油精製
- LSI の設計
- 電力の最適供給

大学

- 時間割り，教室割り当て
- 入学者の選抜，学科所属

生産計画：



単一品種の大量生産 $\Longrightarrow$ 多様な生産

— ある自動車会社の例 —　　顧客の要求の多様化

- 多くの車種 (エンジン , ボディ等)
- 多くのオプション (パワーウィンドウ , エアバッグ)

$$\Downarrow$$

非常に多くの部品の管理 $\Longrightarrow$ コスト

部品には他の部品と代替できるものがあるので , 高い部品を付け捨てしても部品数を減らして管理コストをさげる . 付け捨てした部品は顧客からは見えないようにする .

$$\Downarrow$$

部品間の代替 , 選択 , 生産量に関する最適化問題

施設配置，輸送

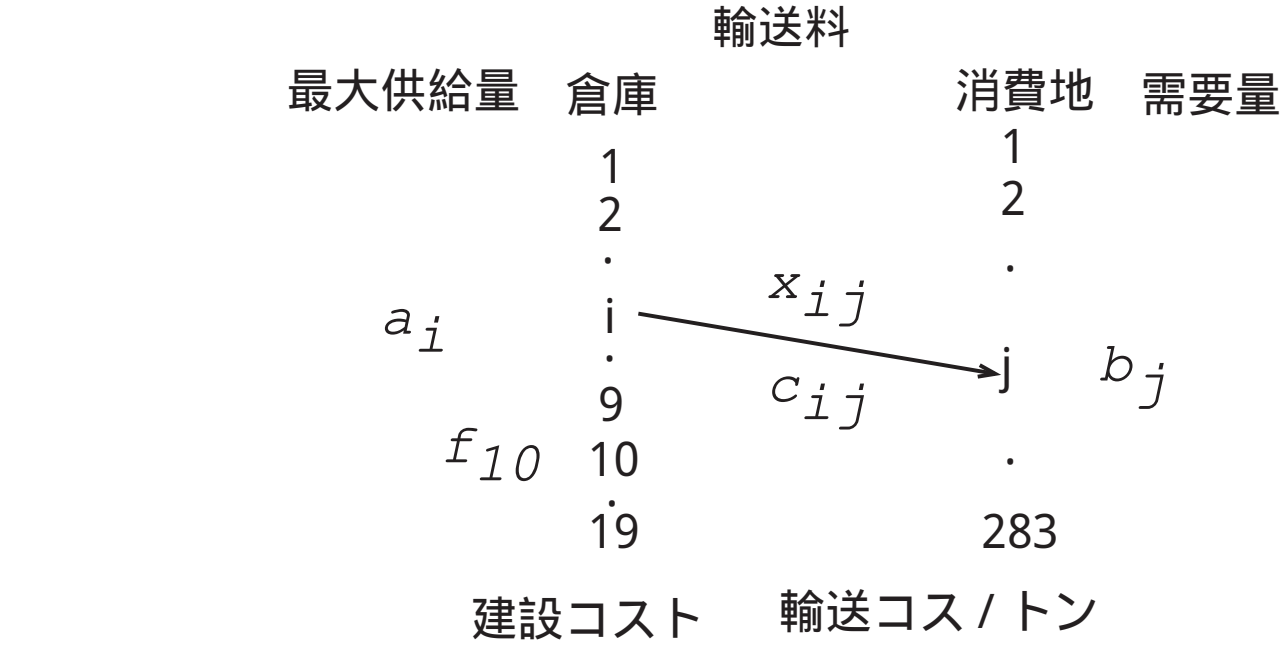
全国 9 箇所に倉庫を持っていて，そこから 283 箇所の消費地に商品を輸送している．需要増加にともない 20 箇所ある候補地の何カ所かに倉庫を建設したい．需要を満たし，かつ，輸送に関わるコストを最小にしたい．

データ

- a_i：倉庫 i の最大供給量 (トン/日) $(i = 1, 2, \ldots, 29)$
- b_j：消費地 j での需要量 (トン/日) $(j = 1, 2, \ldots, 283)$
- c_{ij}：倉庫 i から消費地 j への輸送コスト (千円/トン)
- f_i：倉庫 i の建設コスト + 維持費 (千円/日)

制御できる変量

- $S \subset \{10, \ldots, 29\}$：建設する倉庫
- x_{ij}：倉庫 i から消費地 j への輸送量 (トン/日)



目的： $\displaystyle\sum_{i\in\{1,\ldots,9\}\cup S}\ \sum_{j=1}^{283} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in S} f_i \ \rightarrow$ 最小化

条件： $\displaystyle\sum_{j=1}^{283} x_{ij} \le a_i \ (i \in \{1,\ldots,9\}\cup S)$

$$\sum_{i\in\{1,\ldots,9\}\cup S} x_{ij} = b_j \ (j = 1,2,\ldots,283)$$

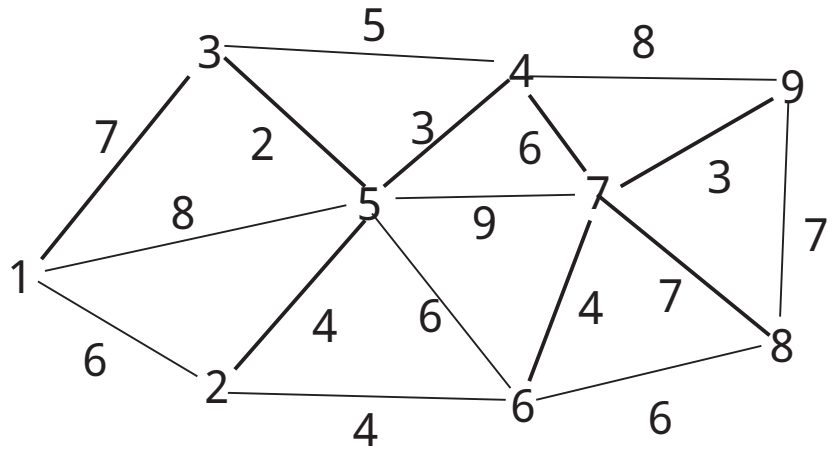
$$x_{ij} \ge 0 \ (j = 1,2,\ldots,283,\ i \in \{1,\ldots,9\}\cup S)$$

人員配置

- 航空会社の乗務員
  考慮すべき要因 — 空港，飛行機，乗務員，フライトスケジュール等
- コンビニ，飲食店等でのアルバイト学生

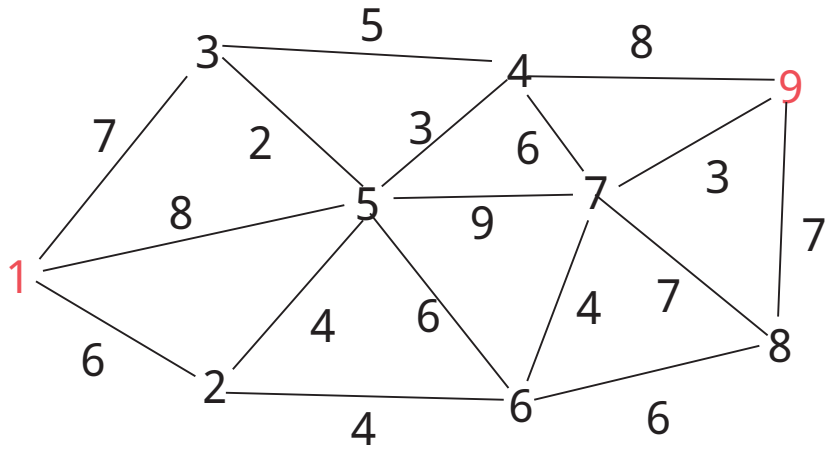
情報通信ネットワーク

- 通信路の動的な決定
- ネットワークの設計
-

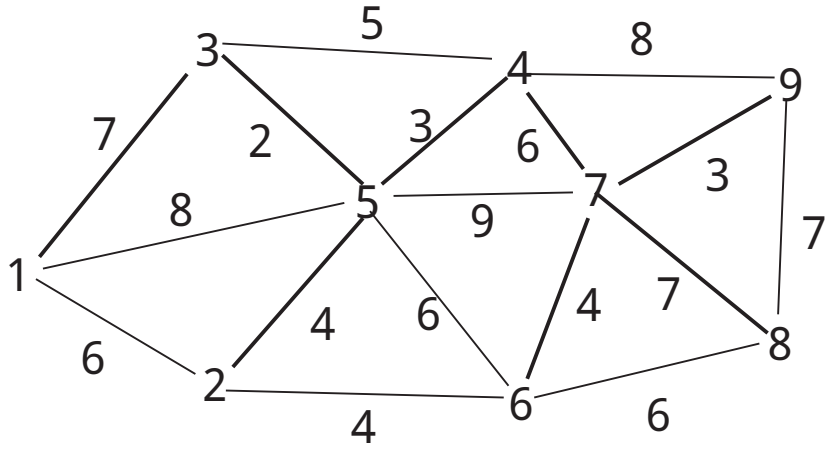


ネットワーク上の最適化問題の例

最短路問題：都市 1 から都市 9 への最短路を計算せよ．

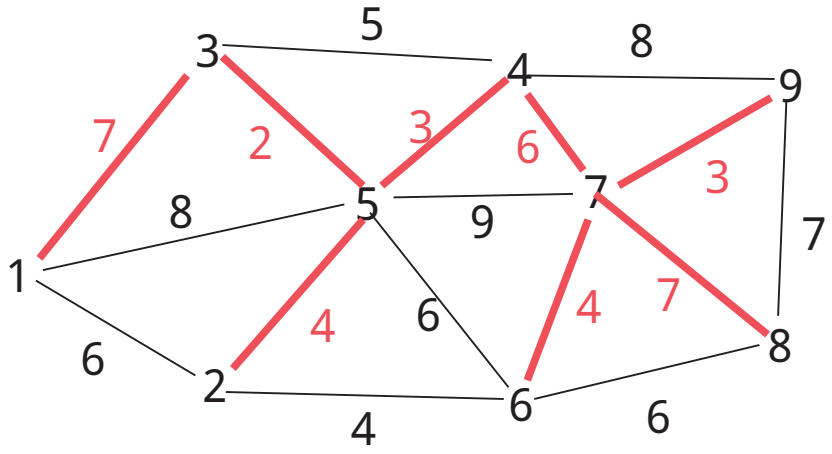


巡回セールスマン問題：９都市すべてを最短時間で回りたい．



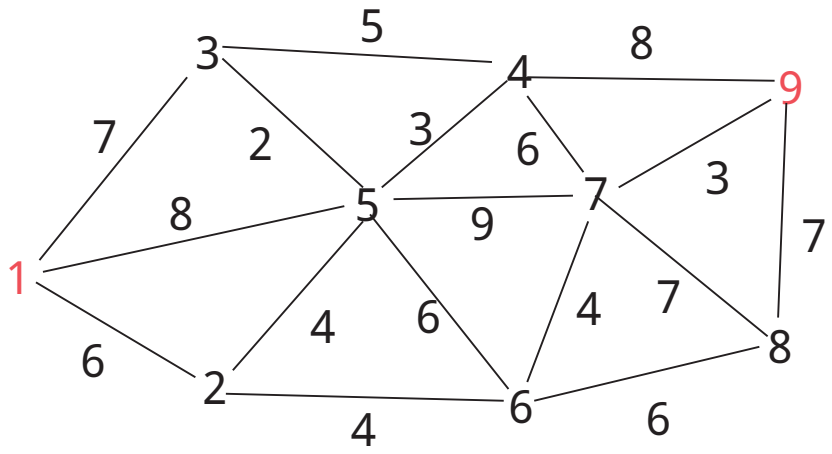
最小木問題：９都市すべてを結ぶネットワークを設計したい．ただし，ネットワークの総ケーブル長を最小にしたい．

例えば



総ケーブル長 = 7+2+4+3+6+4+7+3

最大流問題：９都市の石油パイプライン網が与えられたとき，都市1から都市9へ流せる最大の石油量を計算せよ．



金融関係

- 投資
- 資金の調達
- 金融商品の評価，新商品の開発
-

3. 数理計画法 — 最適化のための理工学

実社会で必要なさまざまな最適化問題

⇓

数理モデル — 研究対象

特に，基礎的で汎用性の高い数理モデルに対する

- 高速な数値計算手法を開発
- 解の性質（安定性，感度分析）の研究

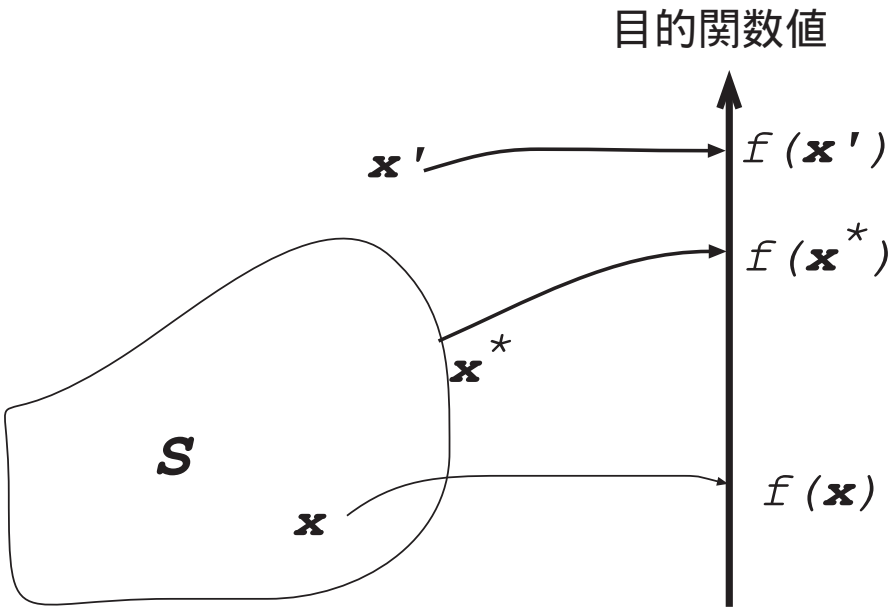
一般の標準的な数理計画問題

$R^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i$ は実数$\}$ (n 次元空間)

$S \subset R^n$, (許容領域)

$f : R^n \to R$, (目的関数) (n 次元空間で定義された実数値関数)

目的： $f(x) \to$ 最大化; 条件： $x \in S$



一般の標準的な数理計画問題

$$R^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \text{ は実数}\}\ (n \text{ 次元空間})$$
$$S \subset R^n,\ (\text{許容領域})$$
$$f : R^n \to R,\ (\text{目的関数})\ (n \text{ 次元空間で定義された実数値関数})$$

目的： $f(x) \to$ 最大化; 条件： $x \in S$

通常，許容領域 S は

$$S = \{x \in T : g_j(x) \leq 0\ (j = 1, 2, \ldots, m)\}$$

と表現される．ただし，g_j は R^n で定義された実数値関数．R^n の部分集合 T は不等式では表現しにくい条件，例えば

$$T = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \text{ は整数}\},$$
$$T = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \text{ は } 0 \text{ または } 1\}$$

等を S に組み入れるのに使われる．

数理計画問題の難しさ— 計算は computer を用いて行われるが，記憶領域は有限で，有限の時間では，有限桁の計算を有限回しか行うことが出来ない．

$\Longrightarrow$ 万能手法はない．さまざまな数理計画モデルのそれぞれに対して，多くの手法が提案されている

4. 線形計画問題 — 最も基本的な数理計画モデル

$c_j,\ b_i,\ a_{ij}$: 実定数, x_j : 実変数 $(j = 1, 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, m)$

線形計画問題

目的： $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow$ 最大化

条件： $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$

飼料混合問題 — 線形計画問題の例

m 種類の栄養素 (ビタミン，ミネラル，蛋白質，カロリー等), n 種類の飼料

c_j : 第 j 飼料 1kg 当たりの値段, b_i : 第 i 栄養素 1 ヶ月当たりの必要量

a_{ij} : 第 j 飼料 1kg が含んでいる第 i 栄養素の量

栄養の条件を満たして，最もやすく混合飼料を作りたい．

x_j : 第 j 飼料の購入量

$i \setminus j$	1	2	...	n	栄養素必要量
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
.	.	.	...	.	.
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
飼料 j 値段	c_1	c_2	...	c_n	
飼料 j 購入量	x_1	x_2	...	x_n	

目的 : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow$ 最小化

条件 : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m), \ x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n)$

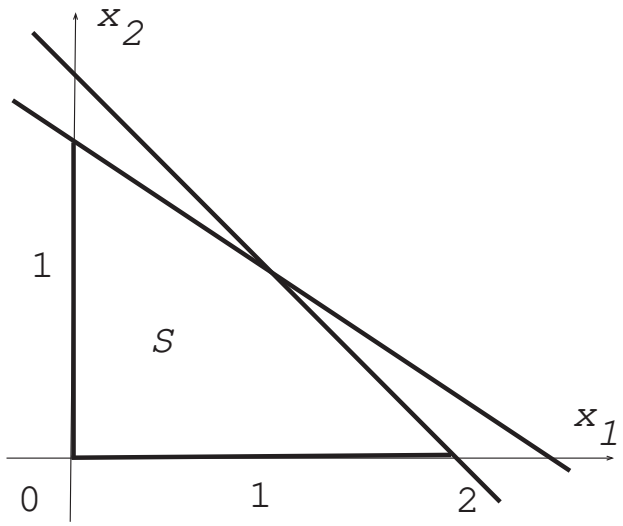
簡単な線形計画問題の例

目的： $x_1 + 2x_2 \longrightarrow$ 最大化

条件： $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$

$x_1 + x_2 \leq 2,$

$2x_1 + 3x_2 \leq 5.$



線形計画問題の特徴

(a) 許容領域 S は有限個の超平面で囲まれた多面集合で，有限個の頂点を持つ.

(b) 最小点は頂点で達成される

シンプレックス法

1. 頂点を 1 つ見つける $\longrightarrow$ 初期頂点
2. 初期頂点から隣の頂点をたどって最小点に達する

代数的には線形方程式に対する消去演算

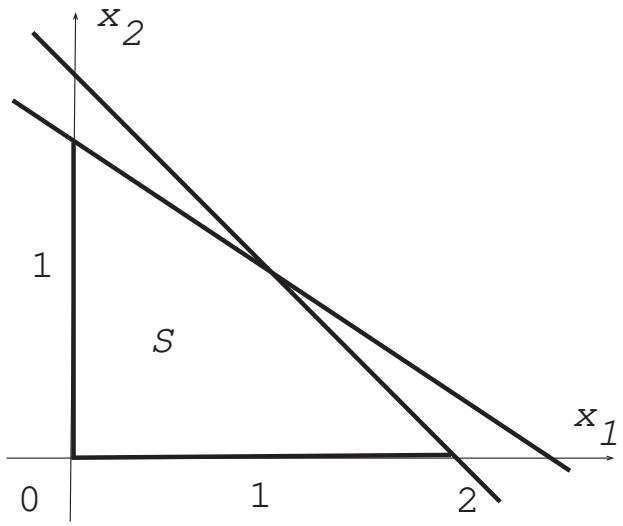
簡単な線形計画問題の例

目的： $x_1 + 2x_2 \rightarrow$ 最大化

条件： $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$

$x_1 + x_2 \leq 2,$

$2x_1 + 3x_2 \leq 5.$



- 実社会から起こるさまざまな問題が線形計画問題に帰着できる
- 規模が大きい (例えば , n, $m \geq 100$) と “賢い方法” を使わないと解けない
- どの程度の規模の問題を解くことが要請されているか?

- 現時点ではどの程度の規模の問題が解けるか？

5. “最適化” の背景にある基本的な考え方

- 目的から始める．すなわち，“何が出来るか”，“どんな規則・条件があるか”，“どんな方法があるか” は後で考慮する．まず，最初に何がやりたいか？
- Top $\Longrightarrow$ down で考える．より上位の目的から，下位の目的へ．常に大域的な最適化を優先する．

こんな考え方は役に立つか？ $\Rightarrow$ 数理科学的な方法を適用する際の問題点

(a) 目的がない．習慣，惰性で行動 — “最適化” 以前

(b) 目的不明確． (c) 目的はあるが，数量化されない．数量化しにくい．

(d) 多くの目的がある．

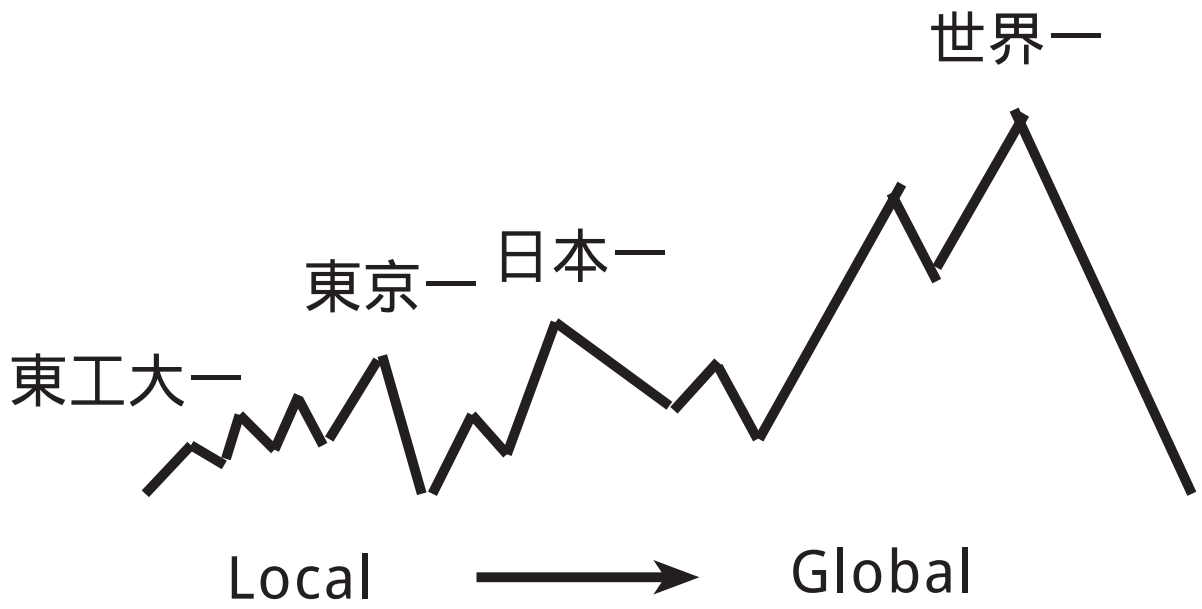
— 数理科学的な方法が多く提案されている

(e) 時間とともに目的は変化．(f) 時間とともに状況が変化．(g) 未来は不確実．

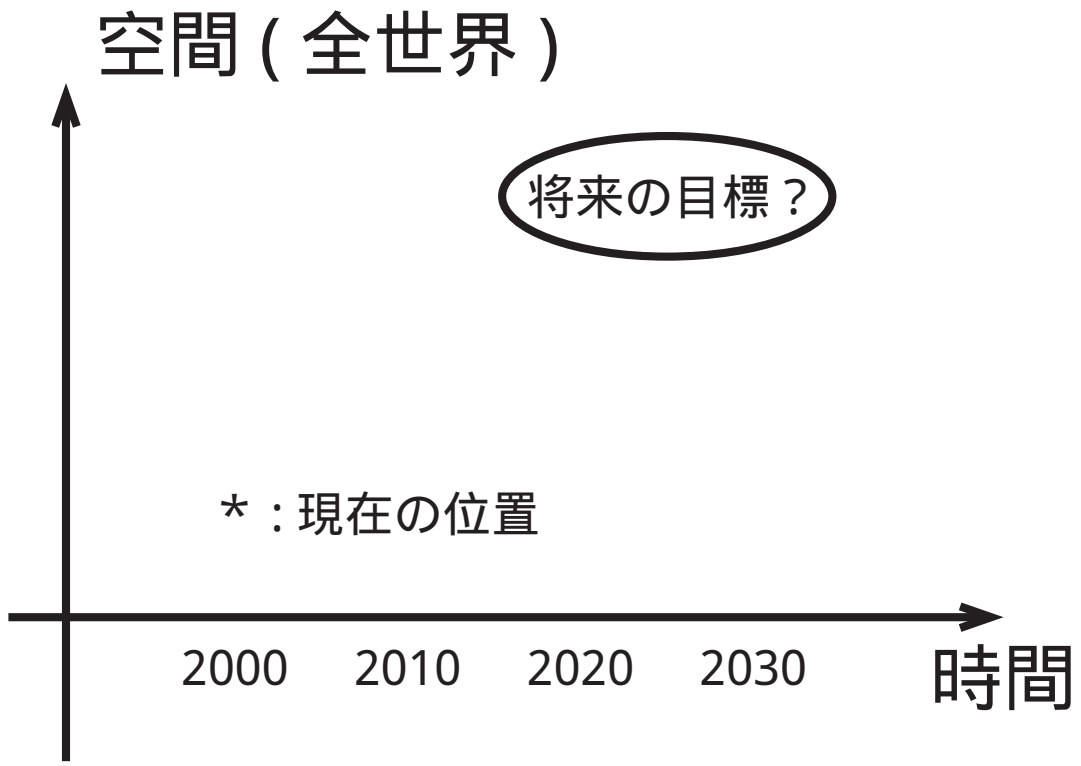
— 数理科学的な方法の対象内

- 数理科学的な方法論には馴染まない領域がある．

Local Optimum (局所最適) と Global Optimum (大域最適)



より大域的に



目標を達成するために現在何をしておくことが最適か？