

ISSN 1342-2804

Research Reports on Mathematical and Computing Sciences

A Numerical Method for the Survival
Probability of Diffusion Processes Using
Semidefinite Programming

Kentaro Suzuki, Naoto Miyoshi and
Masakazu Kojima

January 2007, B-438

Department of
Mathematical and
Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

SERIES **B**: **Operations Research**

B-438 A Numerical Method for the Survival Probability of Diffusion Processes Using Semidefinite Programming

Kentaro Suzuki[‡], Naoto Miyoshi^{*} and Masakazu Kojima[†]

January 2007

Abstract.

Recently semidefinite programming formulation was proposed for numerical analysis of some stochastic processes. In this paper, we deal with diffusion processes and calculate the survival probability, which is defined as the probability of no exceeding a given value during a given time period. First, we formulate a semidefinite programming problem for the survival probability of a given diffusion process. Maximizing or minimizing the objective function which represents the survival probability, we can compute an upper bound and a lower bound for it, respectively. The constraints of the problem consist of equations derived from fundamental properties on the diffusion process and positive semidefinite conditions on moments of some measures associated to the process. We confirm effectiveness of the proposed method through numerical results on Bessel process, Ornstein–Uhlenbeck process, Cox–Ingersoll–Ross model and geometric Brownian motion with comparison to known analytic solutions in the case of Bessel process. The paper is written in Japanese.

Key words.

semidefinite programming, diffusion process, survival probability

‡ Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552 Japan.

`suzuki2@is.titech.ac.jp`

* Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552 Japan.

`miyoshi@is.titech.ac.jp`

† Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552 Japan.

`kojima@is.titech.ac.jp`

拡散過程の生存確率に対する半正定値計画を用いた数値計算法

鈴木健太郎

三好直人
東京工業大学

小島政和

和文概要 近年、確率過程に対する解析手法の一つとして数理計画として定式化する手法が提案されている。本稿では、確率過程の中でも特に拡散過程に対して、ある期間内にある値を超えない確率である生存確率を考え、その値を求めるための数理計画を定式化した。また、その定式化を用いて実際にいくつかのモデルについて数値実験を行い、この手法の有効性を実証した。

キーワード: 最適化, 半正定値計画, 拡散過程

1. はじめに

現在、拡散過程は物理学や化学を始め、気象学や金融工学など様々な場面で利用されている。応用される上で、ある定められた時刻までに定められた値を超えるかどうか、超えるとすればどれぐらいの割合で超えるのか、ということに興味を向けられることがある。具体的には、ある期間内に気温が予め定めた温度を超える確率、あるいは株価がある値に達する確率などである。金融派生商品のうち、バリアオプションは原資産の価格がある値に達するかどうかで権利の発生・消失が決定し、まさにこの確率がオプションの価値を左右するといっても過言ではない。そこで、拡散過程において、定められた時刻までにある値を超えない確率である生存確率を考え、この値を数理計画の手法を用いて求めることを考える。

拡散過程に対する線形計画を応用した解析手法として、Helmes-Röhl-Stockbridge[6]によって提案された手法がある。この方法では、ある停止時刻までの期待占有測度、到達位置の分布と呼ばれる2つの測度を考え、それぞれの測度のモーメントを変数とするような線形計画問題を定式化する。定式化は、制約式として本来モーメントが満たすべき条件と、与えられた確率過程に対する上記の測度のモーメントになっているための条件を用い、求めたいモーメントに対応する変数を最大化、および最小化することによって、その上界と下界を計算する。

この手法を半正定値計画として定式化する方法がLasserre-Rumeau[11]によって提案された。この方法では線形計画において用いられた条件の一部をモーメント行列、局所化モーメント行列という行列で置き換えることで、半正定値計画として定式化する。類似の研究としては[12]が挙げられる。また、アプローチが多少異なるが、確率過程に対して最適化問題を定式化し、解析する手法として[2]、[1]などがある。

本研究では、[6]や[11]などの提案した手法を応用して生存確率の上界と下界を計算する。そのために、既存の手法に新たなモーメントの定義を導入し、生存確率を目的関数とする半正定値計画を定式化する。生存確率に関して、オルンシュタイン・ウーレンベック過程などは解析解が求められておらず、近年では[16]においてエーレンフェスト過程近似を用いて近似解が計算されている。本研究の貢献はこのように厳密な解が得られないような拡散過程の生存確率に対して上質な上界と下界を求められることにある。

本稿の構成は以下の通りである．第2節では，本研究で扱う拡散過程に対して生存確率を導入し，また半正定値計画として定式化する上で基本となる方程式を導く．第3節では，生存確率を求める半正定値計画の定式化を行う．その際，定式化に必要なモーメント行列，局所化モーメント行列の定義も示す．第4節では，実際に幾つかの拡散過程について数値実験を行い，解析解の分かっているモデルについてはその比較を行う．また，解析解の分かっているモデルについてもこの手法を用いることで生存確率の上界と下界を計算し，それらによる区間で生存確率が評価できることを示す．第5節では定式化，および数値実験の結果をまとめる．

2. 拡散過程の生存確率と基本方程式

本節では，本研究で扱う拡散過程に対して生存確率を導入する．また，拡散過程の性質を用いて方程式を導く．次節でこの方程式から半正定値計画の等式制約を構築することとなる．

2.1. 拡散過程と生存確率の導入

$\{Y_t\}_{t \geq 0}$ を $E \subseteq \mathbb{R}$ 上のある拡散過程とすると， $\{Y_t\}$ は確率微分方程式を用いて次のように表される．

$$dY_t = \mu(t, y)dt + \sigma(t, y)dW_t \quad (1)$$

この方程式は拡散方程式とも呼ばれる． W_t はウィーナー過程であり， $\mu(t, y)$ はドリフト， $\sigma(t, y)$ はボラティリティと呼ばれる．

生存確率とは定められた時刻までにある値を超えない確率のことであり，ある時刻 $T(\geq 0)$ ，ある値 $u(\in \mathbb{R})$ に対して

$$P(\min\{t \geq 0 | Y_t \geq u\} > T) \quad (2)$$

で定義される．また，ある時間 T までの最大値の分布，

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} Y_t < u\right)$$

とも等価である．停止時刻 $\tau = \min\{\min\{t \geq 0 | Y_t \geq u\}, T\}$ とすると生存確率(2)を

$$P(Y_\tau < u) \quad (3)$$

と表すこともできる．図1, 2はそれぞれ，本研究で考えている領域と拡散過程の概要を図示したものである．図1は時刻 T までに u に達してしまうようなサンプルパスの例であり，この時， u に達した時刻が停止時刻 τ である．図2は時刻 T までに u に達しないようなサンプルパスの例であり，この時， T が停止時刻となる．

以下では到達位置とその時点での停止時刻について考察を進めるため，時間と変移の直積空間 $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ を状態空間とするような確率過程 $X = \{X_t = (t, Y_t) : t \geq 0\}$ を導入する．この状態空間を2つの領域 E_0 と $E_0^c (= E - E_0)$ に分けて考える．停止時刻 τ を $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が初めて E_0^c ，実際には ∂E_0 (境界) に到達する時刻とすると， $X_0 = (0, Y_0) \in E_0$ を初期点として，

$$\tau = \min\{t \geq 0 : X_t \in \partial E_0\}$$

と書き直せる．この停止時刻における位置 X_τ を到達位置と呼ぶ．

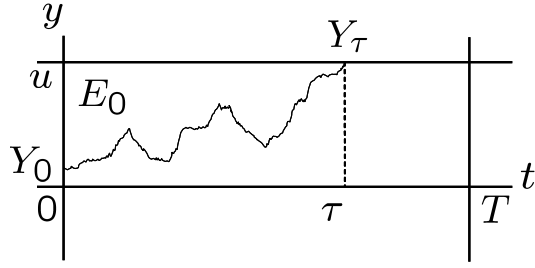


図 1: サンプルパスの例 – 時刻 T までに u を超えてしまう場合

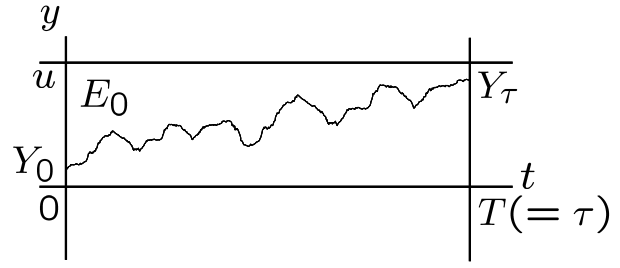


図 2: サンプルパスの例 – 時刻 T までに u を超えない場合

ある時刻 $T(\geq 0)$, ある値 $u(\in \mathbb{R})$ に対する生存確率を考えるととき ,

$$E_0 = [0, T] \times (-\infty, u]$$

となる . ∂E_0 は

$$\partial E_0 = \partial E_0^{(t)} \cup \partial E_0^{(r)} \quad (4)$$

の二つの領域に分割することができる . $\partial E_0^{(t)}$ は ∂E_0 のうち , 停止時刻が定めた時刻 T 未満である時の到達位置 , つまり時刻 T までにある値 u に達してしまっている領域を表し , $\partial E_0^{(r)}$ は ∂E_0 のうち , 停止時刻においてある値 u を超えないような領域を表す . 即ち ,

$$\begin{aligned} \partial E_0^{(t)} &= [0, T] \times \{u\} \\ \partial E_0^{(r)} &= \{T\} \times (-\infty, u) \end{aligned}$$

である . ただし , 拡散過程によっては正の値のみを取るものがあるので , その場合には

$$\begin{aligned} E_0 &= [0, T] \times (0, u] \\ \partial E_0^{(t)} &= [0, T] \times \{u\} \\ \partial E_0^{(r)} &= \{T\} \times (0, u) \end{aligned} \quad (5)$$

となる .

2.2. 無限小生成作用素と基本方程式

本節では , 第 3 節で半正定値計画の等式制約を構築するために無限小生成作用素 (以下 , 生成作用素) を用いて基本方程式と呼ばれる等式を導く . A を (1) 式のように定義された拡散過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ の生成作用素とする . \mathcal{C} を実数から実数への連続関数全体の集合とすると , 生成作用素は $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ に対して次のように表されることが分かっている [9] .

$$f \mapsto Af(y) := \mu(t, y) \frac{df(y)}{dy} + \frac{1}{2} \sigma(t, y)^2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2}$$

このとき ,

$$f(Y_t) - f(Y_0) - \int_0^t Af(Y_s) ds, \quad t \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

がマルチンゲールとなる．これと同様に $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ に属するあらゆる関数 $f(t, y) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して，

$$f(t, Y_t) - f(0, Y_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} + A \right) f(s, Y_s) ds, \quad t \geq 0 \quad (6)$$

が期待値が存在するならばマルチンゲールとなることが分かっている [8]．以下では $\frac{\partial}{\partial t} + A$ を改めて A' と書き，確率過程 $X = \{X_t = (t, Y_t) : t \geq 0\}$ に対する生成作用素とは，その A' のことを指すものとする．つまり，

$$\begin{aligned} f \mapsto A'f(t, y) &:= \left(\frac{\partial}{\partial t} + A \right) f(t, y) \\ &= \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \mu(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma(t, y)^2 \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (7)$$

である．

ここで，

$$M_t^f = f(t, Y_t) - f(0, Y_0) - \int_0^t A'f(s, Y_s) ds$$

とすると，停止時刻 τ に対して $\mathbf{E}\tau < \infty$ ならば，任意停止定理より $\mathbf{E}[M_\tau^f] = \mathbf{E}[M_0^f] = 0$ なので， $\forall f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ に対して

$$\mathbf{E}f(\tau, Y_\tau) - \mathbf{E}f(0, Y_0) - \mathbf{E} \int_0^\tau A'f(s, Y_s) ds = 0 \quad (8)$$

である．

ν_0 を“停止時刻 τ までの期待占有測度”， ν_1 を“到達位置 Y_τ の分布”とする． ν_0 は E_0 上， ν_1 は ∂E_0 上の測度であり，

$$\begin{aligned} \nu_0(B) &:= \mathbf{E} \int_0^\tau I_{\{(s, Y_s) \in B\}} ds \quad (B \subseteq E_0) \\ \nu_1(B) &:= Pr\{(\tau, Y_\tau) \in B\} \quad (B \subseteq \partial E_0) \end{aligned}$$

と定義される．これを用いて，

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^\tau A'f(s, Y_s) ds &= \int_{E_0} A'f(t, y) \nu_0(dt, dy) \\ \mathbf{E}f(\tau, Y_\tau) &= \int_{\partial E_0} f(t, y) \nu_1(dt, dy) \end{aligned} \quad (9)$$

と変形できるので， $Y_0 = y_0$ とすると (8) 式は (9) 式を用いて，

$$\int_{\partial E_0} f(t, y) \nu_1(dt, dy) - f(0, y_0) - \int_{E_0} A'f(t, y) \nu_0(dt, dy) = 0, \quad \forall f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \quad (10)$$

と書き直せる．この等式は基本方程式と呼ばれる．これは第 3 節で用いる．

拡散過程に対して生成作用素は一意に定まるため，基本方程式を満たす測度 ν_0 と ν_1 もまた一意に定まる．ただし，実際に数値計算を行う上で関数 f を有限個に制限する必要がある．有限個の基本方程式を扱うことになる．しかし，有限個の基本方程式では元々想定している拡散過程を一意に定められない可能性があり，このことが計算の精度に影響を与えることがあると考えられる．これについては 4.4 節で考察する．

3. 半正定値計画としての定式化

まず，基本方程式 (10) から線形制約式を導く．具体的には線形制約式を前節の ν_0, ν_1 に対するモーメントを変数として記述することになるが，その変数がある測度のモーメントとなっていることを保証する条件が必要となる．そこでモーメント行列と局所化モーメント行列という行列を導入する．そして，その行列の半正定値性を制約とすることで半正定値計画を定式化する．

3.1. 変数となるモーメントの定義

$\{m_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$, $\{b_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ をそれぞれ ν_0, ν_1 に対する (i, j) 次モーメントとする．つまり，

$$m_{i,j} = \int_{E_0} t^i y^j \nu_0(dt, dy), \quad b_{i,j} = \int_{\partial E_0} t^i y^j \nu_1(dt, dy), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ \quad (11)$$

である．

さらに，到達位置 Y_τ とは ∂E_0 に達したときの位置のことであり，最終的に求めたいものは (3) 式であったから，到達位置の分布 ν_1 を領域 $\partial E_0^{(t)}$, $\partial E_0^{(r)}$ に対応する 2 つの測度 $\nu_1^{(t)}$, $\nu_1^{(r)}$ に分割する．このとき

$$\begin{aligned} b_i^{(t)} &= \int_{[0,T]} t^i \nu_1^{(t)}(dt) \\ b_j^{(r)} &= \int_{(-\infty, u)} y^j \nu_1^{(r)}(dy) \end{aligned}$$

とすると，

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \int_{\partial E_0^{(t)}} t^i y^j \nu_1(dt, dy) + \int_{\partial E_0^{(r)}} t^i y^j \nu_1(dt, dy) \\ &= u^j \int_{[0,T]} t^i \nu_1^{(t)}(dt) + T^i \int_{(-\infty, u)} y^j \nu_1^{(r)}(dy) \\ &= u^j b_i^{(t)} + T^i b_j^{(r)} \end{aligned} \quad (12)$$

となる．ここで生存確率について考えると，定義から

$$\begin{aligned} P(Y_\tau < u) &= \int_{\partial E_0^{(r)}} \nu_1(dt, dy) \\ &= \int_{(-\infty, u)} \nu_1^{(r)}(dy) \\ &= b_0^{(r)} \end{aligned}$$

とできるので，生存確率は $b_0^{(r)}$ で表されることが分かる．拡散過程が正の値のみを取る場合においても (5) 式を用いて同様の変形を行えば良い．

以降，半正定値計画として定式化する際に $b_0^{(r)}$ を目的関数とし， $\{m_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$, $\{b_i^{(t)}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, $\{b_j^{(r)}\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ を変数として定式化することを考える．

3.2. 等式制約

(10) 式に基本方程式を示したが，これに対して， f と A' を具体的に定義することで線形制約式を作る．

まず，多項式は $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ に含まれる．ここで f を多項式の特殊な場合として単項式，つまり $(t, y) \mapsto f(t, y) := t^k y^l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$ とすると， $A'f(t, y)$ は (7) 式より

$$\begin{aligned} (t, y) \mapsto A'f(t, y) &= \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \mu(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma(t, y)^2 \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2} \\ &= kt^{k-1} y^l + l\mu(t, y) t^k y^{l-1} + \frac{1}{2} l(l-1) \sigma(t, y)^2 t^k y^{l-2} \end{aligned}$$

と書ける．さらに， $\mu(t, y)$ と $\sigma(t, y)$ が t と y に関して多項式となっていた場合， $f(t, y) = t^k y^l$ に対してある定数 $\{c_{i,j}(k, l)\}$ を用いて

$$(t, y) \mapsto A'f(t, y) = \sum_{i,j} c_{i,j}(k, l) t^i y^j$$

の形で書ける．したがって，基本方程式 (10) は $\nu_0, \nu_1^{(t)}, \nu_1^{(r)}$ のモーメントである $\{m_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$, $\{b_i^{(t)}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, $\{b_j^{(r)}\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ を用いて，(11), (12) 式より

$$u^l b_k^{(t)} + T^k b_l^{(r)} - t_0^k y_0^l - \sum_{i,j} c_{i,j}(k, l) m_{i,j} = 0 \quad (13)$$

と書き直すことができる．(10) 式は任意の $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ に対して成り立つ式であったから，(13) 式は任意の $k, l \in \mathbb{Z}_+$ に対して成り立つ．また， $\mu(t, y)$ が y に関して多項式となっていない場合の例として第 4 節でベッセル過程を扱うが，この場合もある変換を用いて (13) 式と等価な形に変形できる．変換については 4.1.1 節に記す．

3.3. モーメント行列

$n \in \mathbb{N}$ を固定して考える．

$$\{x_\alpha\} := 1, x_1, \dots, x_n, \dots, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_1^k, x_1^{k-1} x_2, \dots, x_n^k \quad (14)$$

$$u(x) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n & \dots & x_1^2 & x_1 x_2 & \dots & x_1^k & x_1^{k-1} x_2 & \dots & x_n^k \end{pmatrix} \quad (15)$$

(14) は n 変数，次数 k の実変数多項式空間の通常基底であり，(15) はその基底ベクトルである．

このとき， $\{m_\alpha\}$ を $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ であるような実変数とすると，一般にモーメント行列 $M_k(m)$ とは， $u(x)^T u(x)$ を各要素が x_1, x_2, \dots, x_n の単項式である行列に展開した後に各単項式の次数を添え字で置き換える．つまり，

$$x^\alpha \longrightarrow m_\alpha$$

という操作を行った行列のことであり，次のような関係によっても定義される．

$$\left[\begin{array}{l} M_k(m)(1, j) = m_\alpha \\ M_k(m)(i, 1) = m_\beta \end{array} \right] \implies M_k(m)(i, j) = m_{\alpha+\beta}$$

ただし， $u(x)^T u(x)$ は対称行列となるので， $M_k(m)$ も対称行列となる．

以下でモーメント行列の具体例を示す．ただし，本研究では次元の拡散過程に関する時間と変位について考えているので，これ以降 $n = 2$ として考える．またこのとき，その構築の仕方から，現れる変数を $m_{i,j}$ とすると，その添え字に関して

$$0 \leq i + j \leq 2k$$

という関係になることが分かる．

例 1: $k = 2$ の場合を考える．このとき，

$$u(t, y) = \begin{pmatrix} t^0 y^0 & t^0 y^1 & t^0 y^2 & t^1 y^0 & t^1 y^1 & t^2 y^0 \end{pmatrix}$$

となり，これを用いて $u(t, y)^T u(t, y)$ を考えると，これは 6×6 対称行列となる．

$$u(t, y)^T u(t, y) = \begin{pmatrix} t^0 y^0 & t^0 y^1 & t^0 y^2 & t^1 y^0 & t^1 y^1 & t^2 y^0 \\ t^0 y^1 & t^1 y^2 & t^0 y^3 & t^1 y^1 & t^1 y^2 & t^2 y^1 \\ t^0 y^2 & t^0 y^3 & t^0 y^4 & t^1 y^2 & t^1 y^3 & t^2 y^2 \\ t^1 y^0 & t^1 y^1 & t^1 y^2 & t^2 y^0 & t^2 y^1 & t^3 y^0 \\ t^1 y^1 & t^1 y^2 & t^1 y^3 & t^2 y^1 & t^2 y^2 & t^3 y^1 \\ t^2 y^0 & t^2 y^1 & t^2 y^2 & t^3 y^0 & t^3 y^1 & t^4 y^0 \end{pmatrix}$$

さらに， $t^i y^j$ を実変数 $m_{i,j}$ ($0 \leq i+j \leq 4$) に置き換えたものがモーメント行列であり， $M_2(m)$ と表す．

$$M_2(m) = \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & m_{0,2} & m_{1,0} & m_{1,1} & m_{2,0} \\ m_{0,1} & m_{1,2} & m_{0,3} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{2,1} \\ m_{0,2} & m_{0,3} & m_{0,4} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{2,2} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{2,0} & m_{2,1} & m_{3,0} \\ m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{3,1} \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{3,0} & m_{3,1} & m_{4,0} \end{pmatrix}$$

□

3.4. 局所化モーメント行列

実多項式 q を $q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ とする．一般に局所化モーメント行列 $M_k(qm)$ とは， $q(x)u(x)^T u(x)$ の各要素を x_1, x_2, \dots, x_n の多項式である行列に展開した後に，各単項式 x^α を実変数 m_α で置き換える操作を行った行列である．また，次のような関係によっても定義される．

$\beta(i, j) \in \mathbb{Z}_+^n$ を $M_k(m)$ の (i, j) 成分の添え字とする．また， q_α を q の次数 α の項の係数とすると，一般に局所化モーメント行列 $M_k(qm)$ は次のように定義される．

$$M_k(qm)(i, j) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} m_{\{\beta(i,j)+\alpha\}}$$

$M_k(qm)$ も対称行列となるのは明らかである．局所化モーメント行列の具体例を示す． $n = 2$ である．

例 2: $k = 1$ の場合を考える．このとき，

$$u(t, y) = \begin{pmatrix} t^0 y^0 & t^0 y^1 & t^1 y^0 \end{pmatrix}$$

となり，

$$u(t, y)^T u(t, y) = \begin{pmatrix} t^0 y^0 & t^0 y^1 & t^1 y^0 \\ t^0 y^1 & t^0 y^2 & t^1 y^1 \\ t^1 y^0 & t^1 y^1 & t^2 y^0 \end{pmatrix}$$

であった．さらに，このとき例として $q(t, y) = -y^2 + 3y - 2$ とし， $q(t, y)u(t, y)^T u(t, y)$ を考える．

$$\begin{aligned}
& q(t, y)u(t, y)^T u(t, y) \\
&= (-y^2 + 3y - 2) \begin{pmatrix} t^0 y^0 & t^0 y^1 & t^1 y^0 \\ t^0 y^1 & t^0 y^2 & t^1 y^1 \\ t^1 y^0 & t^1 y^1 & t^2 y^0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -t^0 y^2 + 3t^0 y^1 - 2t^0 y^0 & -t^0 y^3 + 3t^0 y^2 - 2t^0 y^1 & -t^1 y^2 + 3t^1 y^1 - 2t^1 y^0 \\ -t^0 y^3 + 3t^0 y^2 - 2t^0 y^1 & -t^0 y^4 + 3t^0 y^3 - 2t^0 y^2 & -t^1 y^3 + 3t^1 y^2 - 2t^1 y^1 \\ -t^1 y^2 + 3t^1 y^1 - 2t^1 y^0 & -t^1 y^3 + 3t^1 y^2 - 2t^1 y^1 & -t^2 y^2 + 3t^2 y^1 - 2t^2 y^0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで， $t^i y^j$ を実変数 $m_{i,j}$ に置き換えたものが局所化モーメント行列であり， $M_1(qm)$ と表す．

$$M_1(qm) = \begin{pmatrix} -m_{0,2} + 3m_{0,1} - 2m_{0,0} & -m_{0,3} + 3m_{0,2} - 2m_{0,1} & -m_{1,2} + 3m_{1,1} - 2m_{1,0} \\ -m_{0,3} + 3m_{0,2} - 2m_{0,1} & -m_{0,4} + 3m_{0,3} - 2m_{0,2} & -m_{1,3} + 3m_{1,2} - 2m_{1,1} \\ -m_{1,2} + 3m_{1,1} - 2m_{1,0} & -m_{1,3} + 3m_{1,2} - 2m_{1,1} & -m_{2,2} + 3m_{2,1} - 2m_{2,0} \end{pmatrix}$$

□

3.5. 半正定値計画モーメント条件

一般に

$$\{m\}_{2k} = (m_{0,0}, m_{0,1}, \dots, m_{0,2k}, m_{1,0}, m_{1,1}, \dots, m_{1,2k-1}, m_{2,0}, \dots, m_{2k,0}) \quad (16)$$

とし， $K = \{y \in \mathbb{R}^n : q_i(y) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r\}$ ， ν を K 上の測度とする．このとき，半正定値条件

$$M_k(m) \succeq 0, \quad M_k(q_i m) \succeq 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (17)$$

は $\{m\}_{2k}$ が K 上のある測度 ν のモーメントの列であることの必要十分条件であることが分かっている ([13], [4])．これを半正定値計画モーメント条件と呼ぶ．

2変数の場合の例として，実数のベクトル (16) と空間 $E_0 = [0, T] \times (-\infty, u]$ について考える．このとき，

$$E_0 = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : \begin{array}{l} q_1(t, y) = t \geq 0, \\ q_2(t, y) = T - t \geq 0, \\ q_3(t, y) = u - y \geq 0 \end{array} \right\}$$

と表せるから， $\{m\}_{2k}$ が $[0, T] \times (-\infty, u]$ でサポートされる測度のモーメントであるための必要十分条件はこの q_1, q_2, q_3 を用いて， $M_k(m) \succeq 0$ ， $M_{k-1}(q_1 m) \succeq 0$ ， $M_{k-1}(q_2 m) \succeq 0$ ， $M_{k-1}(q_3 m) \succeq 0$ となる．ここで，モーメント行列の添え字が k で局所化モーメント行列の添え字が $k-1$ となっている．これは，今 $(m_{0,0}, m_{0,1}, \dots, m_{0,2k}, m_{1,0}, \dots, m_{2k,0})$ という列について考えているので，モーメント行列と局所化モーメント行列の成分の添え字が適合するようにしたためである．

3.6. 定式化

(13) 式と (17) 式は任意の $k \in \mathbb{N}$ について成り立つが、実際に計算機上で数値計算する時は $0 \leq k \leq M$ のように、ある $M \in \mathbb{N}$ で打ち切った緩和問題を解くことになる。

以上をまとめると、 $P(Y_\tau < u) = b_0^{(r)}$ を基本方程式 (13) と $\nu_0, \nu_1^{(t)}, \nu_1^{(r)}$ それぞれに関するモーメント行列、局所化モーメント行列の半正定値性 (17) の下で最大化、および最小化することで上界と下界を求め、生存確率を評価する。

したがって、拡散過程が実数の値を取る場合、半正定値計画は以下のように定式化される。

$$\left. \begin{array}{l} \max (\min) \quad b_0^{(r)} \\ \text{subject to} \quad u^j b_i^{(t)} + T^i b_j^{(r)} - t_0^i y_0^j - \sum_{s,t} c_{s,t}(i,j) m_{s,t} = 0, \\ \quad \quad \quad 0 \leq i + j \leq 2k \\ \quad \quad \quad M_k(m) \geq 0 \quad M_{k-1}(q_l m) \geq 0, \quad l = 1, 2, 3 \\ \quad \quad \quad M_k(b^{(t)}) \geq 0 \quad M_{k-1}(q_{l'} b^{(t)}) \geq 0, \quad l' = 1, 2 \\ \quad \quad \quad M_k(b^{(r)}) \geq 0 \quad M_{k-1}(q_{l''} b^{(r)}) \geq 0, \quad l'' = 3 \end{array} \right\} \quad (18)$$

ただし、

$$q_1(t, y) = t \geq 0, \quad q_2(t, y) = T - t \geq 0, \quad q_3(t, y) = u - y \geq 0$$

である。また、拡散過程が正の値のみを取る場合は以下ようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \max (\min) \quad b_0^{(r)} \\ \text{subject to} \quad u^j b_i^{(t)} + T^i b_j^{(r)} - t_0^i y_0^j - \sum_{s,t} c_{s,t}(i,j) m_{s,t} = 0, \\ \quad \quad \quad 0 \leq i + j \leq 2k \\ \quad \quad \quad M_k(m) \geq 0 \quad M_{k-1}(q_l m) \geq 0, \quad l = 1, 2, 3, 4 \\ \quad \quad \quad M_k(b^{(t)}) \geq 0 \quad M_{k-1}(q_{l'} b^{(t)}) \geq 0, \quad l' = 1, 2 \\ \quad \quad \quad M_k(b^{(r)}) \geq 0 \quad M_{k-1}(q_{l''} b^{(r)}) \geq 0, \quad l'' = 3, 4 \end{array} \right\} \quad (19)$$

ただし、

$$q_1(t, y) = t \geq 0, \quad q_2(t, y) = T - t \geq 0, \quad q_3(t, y) = u - y \geq 0, \quad q_4(t, y) = y \geq 0$$

である。

次節では、(18)、または (19) を用いて具体的な拡散過程の生存確率を数値計算する。

4. 計算機実験

本節では、4つの拡散過程について行った数値計算の結果を示す。4つの拡散過程とはベッセル過程、オルンシュタイン・ウーレンベック過程、Cox-Ingersoll-Ross モデル、幾何ブラウン運動 ([5], [10]) である。半正定値計画を解くソルバとして SeDuMi[15] を用いた。

ベッセル過程については様々な研究がなされており、生存確率に関しても解析解が既に知られている ([7], [3], [14] 等) ので、数値計算結果と解析解とを比較することで本研究の手法で得られた計算結果が上界と下界になっていることを確かめる。

次にオルンシュタイン・ウーレンベック過程に対して数値計算を行った。この過程については解析解は求められていないが、応用上有用なモデルとして知られており、近似解を求める試み等がなされている。

さらに，特に金融工学で代表的なモデルである Cox-Ingersoll-Ross モデル，幾何ブラウン運動に対しても数値計算を行い，この手法が多くの拡散過程に対して有効に用いることができることを実証した．

以下の数値計算では $E_0 = [0, T] \times (-\infty, u]$ に対して変数変換を行うことで $E_0 \rightarrow [0, 1] \times (-\infty, 1]$ として計算している．具体的には

$$\left. \begin{aligned} f(t, y) &= \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^l \\ m_{k,l} &= \int_{E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^l \mu_0(dt, dy) \\ b_k^{(t)} &= \int_{[0, T]} \left(\frac{t}{T}\right)^k \mu_1^{(t)}(dt) \\ b_l^{(r)} &= \int_{(-\infty, u]} \left(\frac{y}{u}\right)^l \mu_1^{(r)}(dy) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

とにおいて定式化を行う． $E_0 = [0, T] \times (0, u]$ の場合も同様である．

この操作で (13) 式は次のような形になり，より安定した数値計算を行うことができる．

$$b_k^{(t)} + b_l^{(r)} - \left(\frac{t_0}{T}\right)^k \left(\frac{y_0}{u}\right)^l - \sum_{i,j} c_{i,j}(k, l) m_{i,j} = 0 \quad (21)$$

4.1. ベッセル過程

4.1.1. モデルと定式化

ベッセル過程とは d 次元標準ブラウン運動の原点からのユークリッドノルムで定義される確率過程であり， $d = 1$ ならば定義から明らかに標準ブラウン運動に一致する．また，この確率過程は負の値を取らないことも明らかである．拡散過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ がベッセル過程であるとき，次のような確率微分方程式で表される．

$$dY_t = \frac{d-1}{2} \frac{1}{Y_t} dt + dW_t \quad d \in \mathbb{N}$$

ただし，初期点とパラメータは $(t_0, Y_0) = (0, 0.1)$ ， $d = 3$ として数値計算を行った． $X_t = \{(t, Y_t)\}_{t \geq 0}$ の生成作用素は (7) より

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{d-1}{2} \frac{1}{y} \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2}$$

である．(20) の関係を用いると，

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{k}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{k-1} \left(\frac{y}{u}\right)^l + \frac{l(d-1)}{2u} \frac{1}{y} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^{l-1} + \frac{l(l-1)}{2u^2} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^{l-2} \quad (22)$$

となるが， $\frac{1}{y}$ が式の中にあると $l = 1$ の場合にモーメントの形で書き直せないので，ラドン・ニコディム微分を用いて ν_0 を次のような ν'_0 に測度変換する．

$$\frac{d\nu'_0}{d\nu_0} = \frac{1}{y}, \quad y \in (0, u)$$

この ν'_0 のモーメントを $m'_{i,j}$ として,

$$m'_{i,j} = \int_{E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{y}{u}\right)^j \nu'_0(dt, dy)$$

とすると,

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= \int_{E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{y}{u}\right)^j \nu_0(dt, dy) \\ &= u \int_{E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{y}{u}\right)^{j+1} \frac{1}{y} \nu_0(dt, dy) \\ &= u \int_{E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{y}{u}\right)^{j+1} \nu'_0(dt, dy) \\ &= um'_{i,j+1} \end{aligned}$$

という関係になっている。(22) 式は

$$\begin{aligned} A'f(t, y) &= \frac{k}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{k-1} \left(\frac{y}{u}\right)^l + \frac{l(d-1)}{2u^2} \frac{1}{y} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^{l-1} + \frac{l(l-1)}{2} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^{l-2} \\ &= \frac{ku}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{k-1} \left(\frac{y}{u}\right)^{l+1} \frac{1}{y} + \frac{l(d+l-2)}{2u} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^{l-1} \frac{1}{y} \end{aligned}$$

のように変形できるので, 以上を用いて基本方程式 (21) は

$$b_i^{(t)} + b_j^{(r)} - \left(\frac{t_0}{T}\right)^i \left(\frac{y_0}{u}\right)^j - \frac{iu}{T} m'_{i-1,j+1} - \frac{j(d+j-2)}{2u} m'_{i,j-1} = 0$$

となる. したがって半正定値計画は (19) より, 次のようになる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (\min) \quad b_0^{(r)} \\ \text{subject to} \quad b_i^{(t)} + b_j^{(r)} - \left(\frac{t_0}{T}\right)^i \left(\frac{y_0}{u}\right)^j - \frac{iu}{T} m'_{i-1,j+1} - \frac{j(d+j-2)}{2u} m'_{i,j-1} = 0, \\ \quad 0 \leq i + j \leq 2k \\ \quad M_k(m') \geq 0 \quad M_{k-1}(q_l m') \geq 0, \quad l = 1, 2, 3, 4 \\ \quad M_k(b^{(t)}) \geq 0 \quad M_{k-1}(q_{l'} b^{(t)}) \geq 0, \quad l' = 1, 2 \\ \quad M_k(b^{(r)}) \geq 0 \quad M_{k-1}(q_{l''} b^{(r)}) \geq 0, \quad l'' = 3, 4 \end{array} \right.$$

ただし,

$$q_1(t, y) = t \geq 0, \quad q_2(t, y) = 1 - t \geq 0, \quad q_3(t, y) = 1 - y \geq 0, \quad q_4(t, y) = y \geq 0$$

4.1.2. 解析解

ベッセル過程において, $d = 3$ の場合, ある期間 $[0, T]$ での最大値が u を超える確率が次の形で計算できることが知られている [7].

$$P(Y_\tau \geq u) = \frac{2u}{y_0} \sum_{n \geq 1} \left\{ \Psi \left(\frac{(2n-1)u + y_0}{\sqrt{T}} \right) - \Psi \left(\frac{(2n-1)u - y_0}{\sqrt{T}} \right) \right\}$$

一方，生存確率は (3) 式より，明らかに

$$\begin{aligned}
 P(Y_\tau < u) &= 1 - P(Y_\tau \geq u) \\
 &= 1 - \frac{2u}{y_0} \sum_{n \geq 1} \left\{ \Psi \left(\frac{(2n-1)u + y_0}{\sqrt{T}} \right) - \Psi \left(\frac{(2n-1)u - y_0}{\sqrt{T}} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

となるので，これを計算すれば良い．ただし， Ψ は標準正規分布の分布関数であり，数値計算上 $1 \leq n \leq 1000$ の範囲で和を取っている．

4.1.3. 計算結果

T を 1 から 10 までの整数値として，各 T に対する解析解との比較を表 1，および図 3 に示した．ただし， $u = 2.0$ ， $k = 15$ である．また， k の値が大きくなっていく時の挙動を図 4 と図 5 に示した．前者では $T = 1$ ， $u = 2.0$ であり，後者では $T = 5$ ， $u = 2.0$ である．

表 1，図 3 より本研究での手法で得られた計算結果が上界と下界になっていることが確認でき，図 4，図 5 より， k を大きくしていくにつれて，上界と下界の幅が狭くなり，解析解に近づいていく様子が確認できる．

表 1: $d = 3, u = 2.0$

T	下界	上界	解析解
1	0.545655	0.597988	0.565915
2	0.158079	0.187456	0.168810
3	0.044797	0.057282	0.049190
4	0.01269	0.017516	0.014326
5	0.003585	0.005401	0.004173
6	0.000995	0.001693	0.001216
7	0.000279	0.000524	0.000355
8	0.000081	0.00016	0.000103
9	0.000023	0.000049	0.000029
10	0.000007	0.000015	0.000008

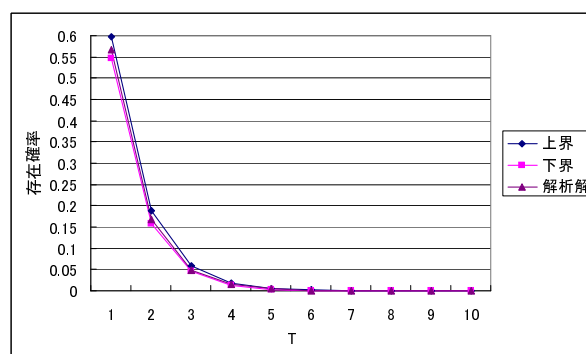


図 3: $d = 3, u = 2.0$

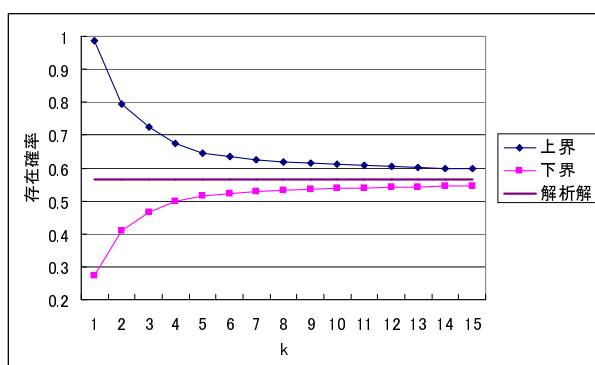


図 4: $d = 3, T = 1, u = 2.0$

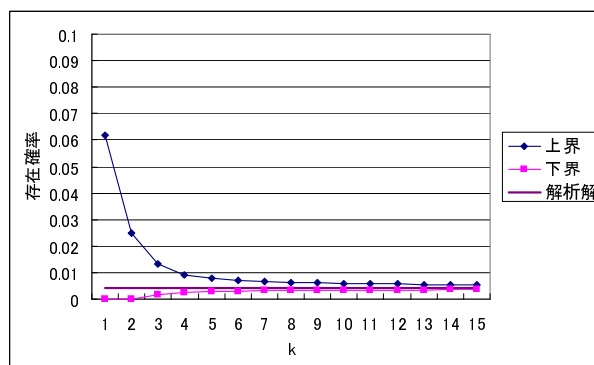


図 5: $d = 3, T = 5, u = 2.0$

4.2. オルンシュタインウーレンベック過程

金融工学における金利の変動に関する代表的なモデルに、スポットレートを $Y(t)$ として、次のような確率微分方程式が挙げられる。

$$dY(t) = a(h - Y(t))dt + \sigma Y(t)^\gamma dW_t \quad (23)$$

$a \geq 0, h \geq 0, \sigma \geq 0, \gamma$ はそれぞれ定数である。このモデルでは $Y(t) > h$ であればドリフトが負となり、平均的には $Y(t)$ は減少し、 $Y(t) < h$ であればドリフトが正となり、平均的には $Y(t)$ は増加することが分かる。これは、スポットレートがある平均的な値 h の周辺を h に回帰するように動いているという性質を基にモデル化されたものだからである。それゆえこのモデルは平均回帰モデルと呼ばれることもある [10]。

4.2.1. モデルと定式化

(23) 式において $\gamma = 0$ とおいたモデルを Vasicek モデルと呼び、その時の拡散過程はオルンシュタインウーレンベック過程として知られている。

$$dY(t) = a(h - Y(t))dt + \sigma dW_t$$

オルンシュタインウーレンベック過程は応用上有用な過程として広く知られており、前述の通り、近年では [16] においてエーレンフェスト過程近似によって生存確率等が評価されているが、ここではその上界と下界を与えることを試みる。

本小節では簡単のため、確率過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ が $h = 0$ のオルンシュタインウーレンベック過程に従う場合を考える。即ち次のような式で表される。

$$dY_t = -aY_t dt + \sigma dW_t \quad a \geq 0, \sigma \geq 0$$

ただし、初期点とパラメータは $(t_0, Y_0) = (0, 0)$ 、 $a = 1$ 、 $\sigma = \sqrt{2}$ として数値計算を行った。 $X_t = \{(t, Y_t)\}_{t \geq 0}$ の生成作用素は (7) より

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} - ay \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2}$$

である。(20) の関係を用いると、

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{k}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{k-1} \left(\frac{y}{u}\right)^l - al \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^l + \frac{\sigma^2 l(l-1)}{2u^2} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^{l-2}$$

となり、基本方程式 (21) は

$$\frac{1}{u^j} b_i^{(t)} + \frac{1}{T^i} b_j^{(r)} - \left(\frac{t_0}{T}\right)^i \left(\frac{y_0}{u}\right)^j - \frac{i}{T} m_{i-1, j} + a j m_{i, j} - \frac{\sigma^2 j(j-1)}{2u^2} m_{i, j-2} = 0$$

となる。これを用いてベッセル過程と同様に半正定値計画 (18) の形に定式化し、数値計算を行う。

4.2.2. 計算結果

数値計算の結果を図 6、図 7、図 8、図 9 に示した。図 6 では $u = 0.5, k = 3$ 、図 7 では $u = 1.0, k = 5$ 、図 8 では $u = 1.5, k = 7$ 、図 9 では $u = 2.0, k = 9$ とし、それぞれ T の値を変えて計算した結果である。

u の値が小さいほど上界と下界の差が大きくなってしまいう傾向があるが、ほぼ安定して解くことができたと思われる。

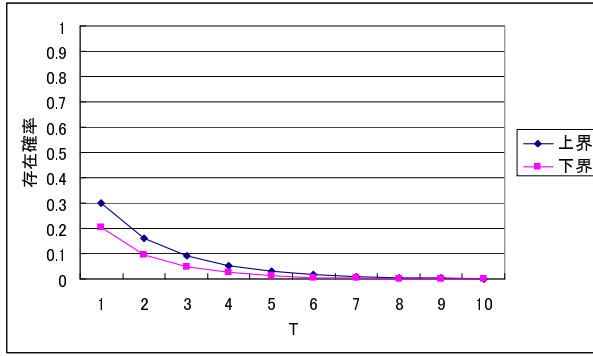


図 6: $u = 0.5$

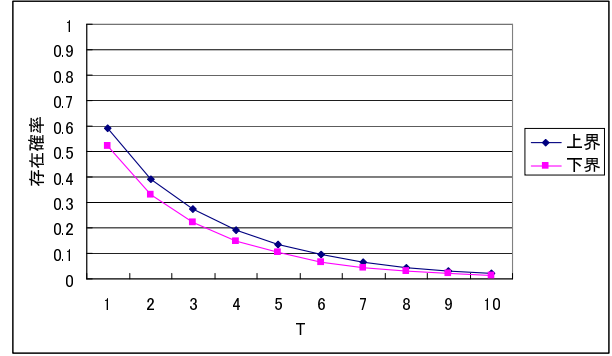


図 7: $u = 1.0$

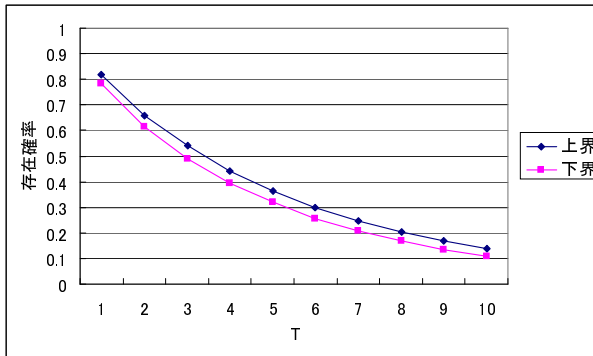


図 8: $u = 1.5$

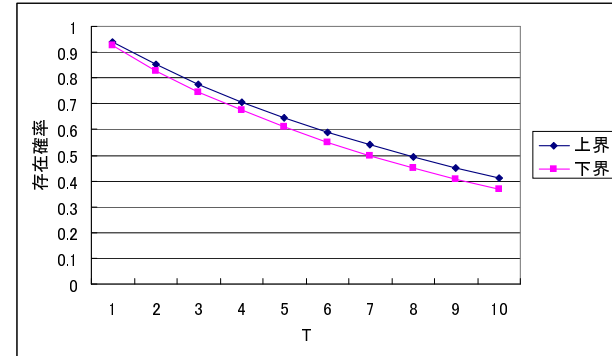


図 9: $u = 2.0$

4.3. Cox-Ingersoll-Ross モデル

4.3.1. モデルと定式化

(23) 式において $\gamma = \frac{1}{2}$ とおいた拡散過程は Cox-Ingersoll-Ross モデルと呼ばれる .

$$dY(t) = a(h - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dW_t \quad a > 0, h \geq 0, \sigma \geq 0 \quad (24)$$

このモデルは 1985 年に Cox , Ingersoll , Ross によって提唱され , 多くの金利派生商品の価格付けに用いられている . Vasicek モデルではスポットレートが負になる場合があるが , Cox-Ingersoll-Ross モデルにおいてはそれが起こらないからである .

(24) 式の拡散過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ において , 初期点とパラメータを $(t_0, Y_0) = (0, 0.1)$, $a = h = \sigma = 1$ としして数値計算を行った . $X_t = \{(t, Y_t)\}_{t \geq 0}$ の生成作用素は (7) より

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + a(h - y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2 y \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2}$$

である . (20) の関係を用いると ,

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{k}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{k-1} \left(\frac{y}{u}\right)^l + ahl \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^l + \frac{l}{u} \left\{ \frac{\sigma^2}{2}(l-1) - a \right\} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(\frac{y}{u}\right)^{l-1}$$

となり , 基本方程式 (21) は

$$b_i^{(t)} + b_j^{(r)} - \left(\frac{t_0}{T}\right)^i \left(\frac{y_0}{u}\right)^j - \frac{i}{T} m_{i-1, j} + ahjm_{i, j} - \frac{j}{u} \left\{ \frac{\sigma^2}{2}(j-1) - a \right\} m_{i, j-2} = 0$$

となる .

4.3.2. 計算結果

図数値計算の結果を図10, 図11, 図12, 図13に示した. $k = 15$ として, 図10では $u = 0.5$, 図11では $u = 1.0$, 図12では $u = 1.5$, 図13では $u = 2.0$ とし, それぞれ T の値を変えて計算した結果である.

いずれの場合も上界と下界の差は小さく, Cox-Ingersoll-Ross モデルの生存確率を評価するという意味では良い結果が得られた.

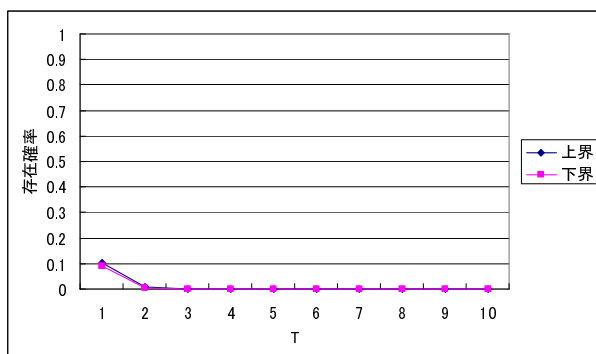


図 10: $u = 0.5$

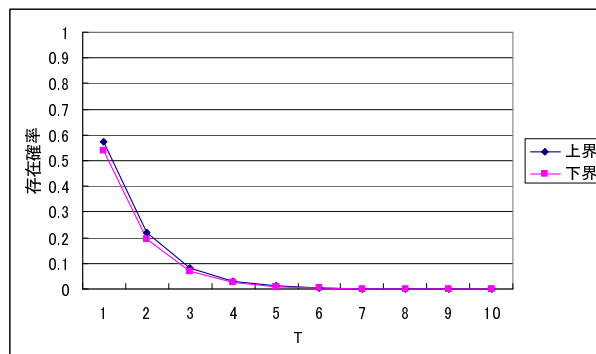


図 11: $u = 1.0$

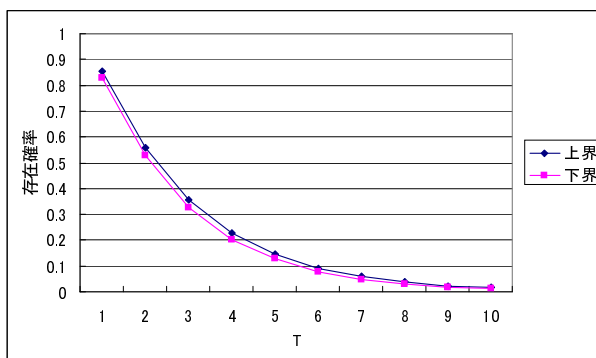


図 12: $u = 1.5$

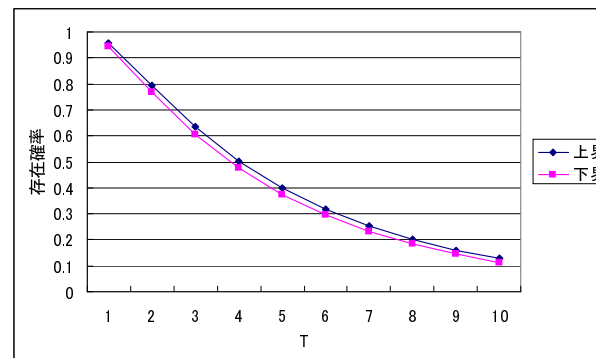


図 13: $u = 2.0$

4.4. 幾何ブラウン運動

4.4.1. モデルと定式化

(23) 式において $h = 0$, $\gamma = 1$ とおいたモデルは幾何ブラウン運動モデルと呼ばれる.

$$dY(t) = bY(t)dt + \sigma Y(t)dW_t \quad b = -a > 0, \sigma \geq 0 \quad (25)$$

このモデルでは次のように変形すると分かるように, 変化率の変動がブラウン運動をするということを示している.

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = bdt + \sigma dW_t$$

このため, 幾何ブラウン運動も Cox-Ingersoll-Ross モデルと同様に正の値しか取らないという特徴がある. また, 幾何ブラウン運動はブラックショールズモデルにおいても原資産価格の変動を表す確率過程として仮定されているなど, 金融工学において重要な意味を持っている.

(25) 式の拡散過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ において, 初期点とパラメータを $(t_0, Y_0) = (0, 0.1)$, $b = \sigma = 1$ として数値計算を行った. $X_t = \{(t, Y_t)\}_{t \geq 0}$ の生成作用素は (7) より

$$f \mapsto A'f(t, y) := by \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2}$$

である. (20) の関係を用いると,

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{k}{T} \left(\frac{t}{T} \right)^{k-1} \left(\frac{y}{u} \right)^l + l \left\{ b + \frac{1}{2} \sigma^2 (l-1) \right\} \left(\frac{t}{T} \right)^k \left(\frac{y}{u} \right)^l$$

となり, 基本方程式 (13) は

$$b_i^{(t)} + b_j^{(r)} - \left(\frac{t_0}{T} \right)^i \left(\frac{y_0}{u} \right)^j - \frac{i}{T} m_{i-1, j} - j \left\{ b + \frac{\sigma^2}{2} (j-1) \right\} m_{i, j} = 0$$

となる.

4.4.2. 計算結果

$k = 15$ として, 図 14 では $u = 0.5$, 図 15 では $u = 1.0$, 図 16 では $u = 1.5$, 図 17 では $u = 2.0$ とし, それぞれ T の値を変えて計算した結果である. 計算結果は u と T が大きくなるにつれて上界と下界の差も広がってしまい, 生存確率を評価できたとはいえないものになってしまった. 次の 4.4.3 ではその原因について考察する.

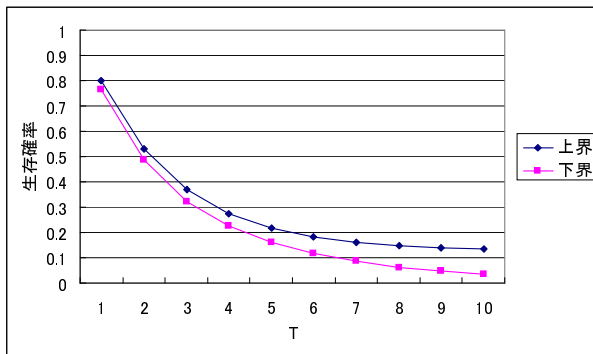


図 14: $u = 0.5$

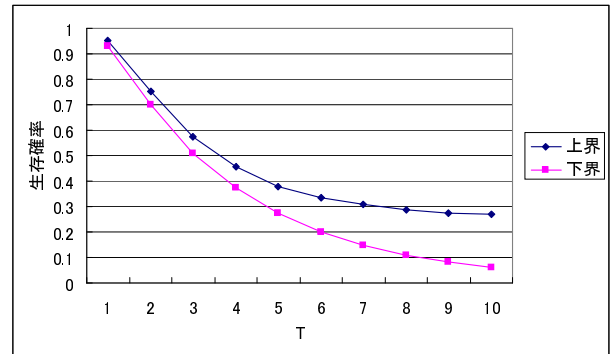


図 15: $u = 1.0$

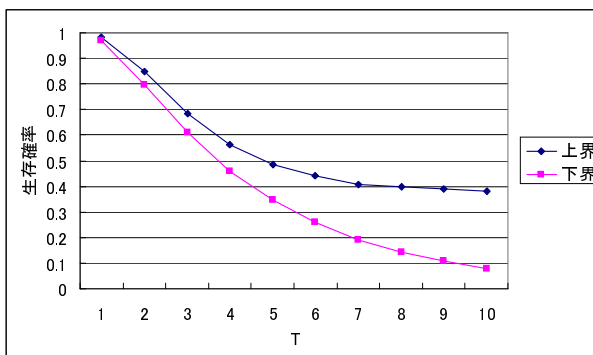


図 16: $u = 1.5$

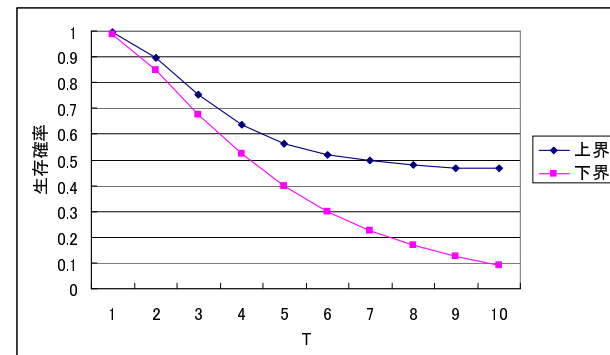


図 17: $u = 2.0$

4.4.3. 関数とモーメントの再定義

数値計算結果として、あまり良い結果が得られなかった原因について考察する．定式化において各拡散過程で異なるのは拡散過程に依存する基本方程式である．その中で、大きく変化が現れるのは、1本の基本方程式中の ν_0 に関するモーメント $m_{i,j}$ の係数、添え字、個数であると考えられる．そして、それは生成作用素 A' と関数 f の形によって決まるが、生成作用素に関しては拡散過程に対して一意に決まってしまう．そこで、 f をここまでとは異なる形で定義することで基本方程式を書き換えることを考える．

f として

$$f(t, y) = \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l$$

を用いてモーメントを次のように定義する．

$$\begin{aligned} m_{k,l} &= \int_{E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l \mu_0(dt, dy) \\ b_{k,l} &= \int_{\partial E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l \mu_1(dt, dy) \end{aligned}$$

さらに、(12)式と同じように $b_{k,l}$ を変形する．即ち

$$\begin{aligned} b_k^{(t)} &= \int_{[0,T]} \left(\frac{t}{T}\right)^k \mu_1^{(t)}(dt) \\ b_l^{(r)} &= \int_{(0,u)} \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l \mu_1^{(r)}(dy) \end{aligned}$$

として

$$\begin{aligned} b_{k,l} &= \int_{\partial E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l \mu_1(dt, dy) \\ &= \int_{\partial E_0^{(t)} \cup \partial E_0^{(r)}} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l \mu_1(dt, dy) \\ &= \int_{\partial E_0^{(t)}} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l \mu_1(dt, dy) + \int_{\partial E_0^{(r)}} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l \mu_1(dt, dy) \\ &= \int_{[0,T] \times \{u\}} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l \mu_1(dt, dy) + \int_{\{T\} \times (0,u)} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l \mu_1(dt, dy) \\ &= \left(-\frac{1}{\log \frac{u}{eu}}\right)^l \int_{[0,T]} \left(\frac{t}{T}\right)^k \mu_1^{(t)}(dt) + \left(\frac{T}{T}\right)^k \int_{(0,u)} \left(-\frac{1}{\log \frac{y}{eu}}\right)^l \mu_1^{(r)}(dy) \\ &= b_k^{(t)} + b_l^{(r)} \end{aligned}$$

である．以上の関数とモーメントを用いると、幾何ブラウン運動に対する基本方程式は以下のようになる．

$$\frac{1}{u^j} b_i^{(t)} + \frac{1}{T^i} b_j^{(r)} - t_0^i y_0^j - \frac{i}{T} m_{i-1,j} - \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) j m_{i,j+1} - \frac{1}{2} j(j+1) \sigma^2 m_{i,j+2} = 0$$

この式とモーメント行列、局所化モーメント行列を用いて定式化したものを解いた結果を以下に示す．

4.4.4. 再計算結果

$k = 15$ として, 図 18 では $u = 0.5$, 図 19 では $u = 1.0$, 図 20 では $u = 1.5$, 図 21 では $u = 2.0$ とし, それぞれ T の値を変えて計算した結果である.

最初の計算結果と比較して, かなりの改善が見られた. これは基本方程式を比較すると明らかのように, 各式に現れるモーメントの数が関数 f を再定義した後の方が多くなっており, より強い制約式となって上界と下界の値が改善されたと考えられる. また, このことは (6) 式が任意の $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ に対して成り立っているときに, f を多項式に制限してしまうと基本方程式とモーメント条件を満たす測度が一意に定まらなくなるのではないかという推測を実験的に裏付ける結果であると言える. f を制限してモーメントを変数とした半正定値計画に定式化した問題は, 基本方程式と元になる測度の存在との必要十分の関係が崩れるという意味で緩和問題になっていると考えられる. したがって, この手法の性質として何次モーメントまで変数として用いるかという部分と f にどのような関数族を設定するかという部分で問題の緩和を行っていることになる. 用いる変数を増やしていくことは計算機の能力に依存するが, 関数族の定め方については今回の計算結果のように工夫の余地が残されている. しかし, 本手法では最終的にモーメントの形に書き直して定式化するため, 関数族の候補が限定されてしまうという問題点もあり, 容易ではない.

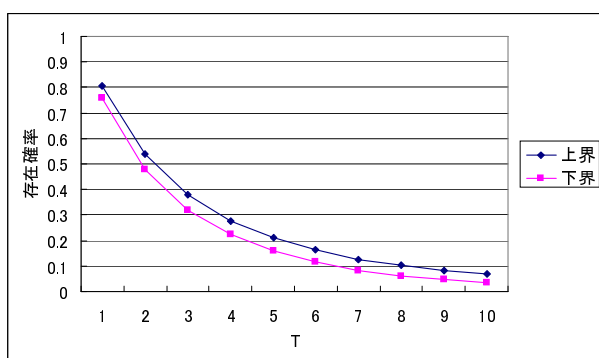


図 18: $u = 0.5$

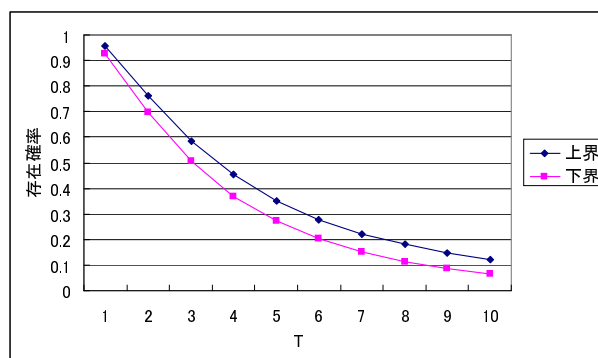


図 19: $u = 1.0$

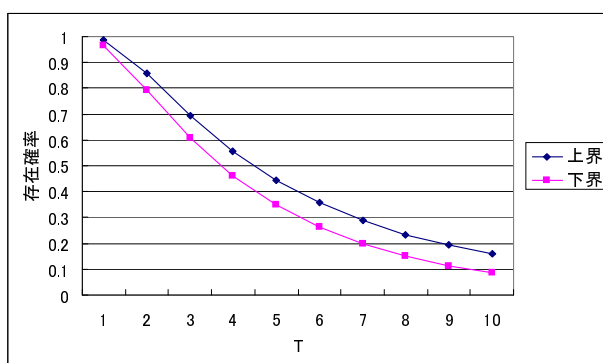


図 20: $u = 1.5$

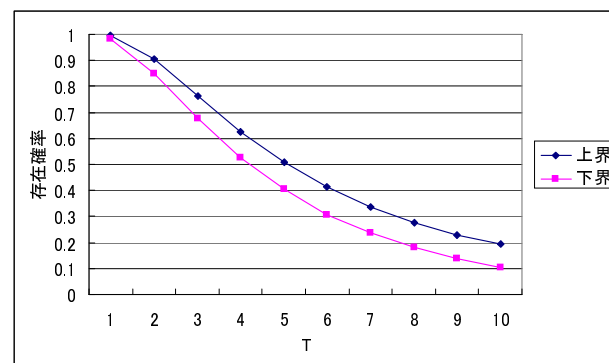


図 21: $u = 2.0$

5. おわりに

本研究では, 拡散過程の生存確率を, 半正定値計画を用いて上界と下界を計算し, それらによる区間で評価する手法を提案した. 不確定な現象に対する解析のニーズは今後も高ま

り，確率過程を用いたモデル化もその中心的な方法として用いられると予想される．またそれと同時に計算機の能力が向上し，最適化問題に対する研究も多く行われていったときに，本手法が非常に有用となることが期待される結果となった．

ただし，そのためには越えなければならない課題が大きく分けて2種類存在する．1つは上記のような計算機上の問題という意味で，もう1つは幾何ブラウン運動の計算を行ったときに発生したような，定式化上の問題という意味である．即ち，

- モーメントの数 (半正定値計画とした時の変数の数) を増やした時に半正定値計画のサイズが大きくなりすぎて数値的に解くことが困難となる
- 関数 f の選び方に特定の基準がなく，単項式だけを用いては必ずしも良い結果になるとは限らない

ということが分かった．

前者はより高速な計算機，あるいはアルゴリズムの開発によって解決される問題であり，後者は経験的に1つの基本方程式により多くの変数が現れた方がより良い結果になるということが分かったが，そのためにどのように f を定めるのかという点で曖昧さが残ってしまい，今後この手法を改善する上で重要な点であると考えられる．

参考文献

- [1] D. Bertsimas, K. Natarajan, and C.P. Teo. Probabilistic combinatorial optimization: Moments, semidefinite programming, and asymptotic bounds. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 15, No. 1, pp. 185–209, 2004.
- [2] D. Bertsimas and I. Popescu. On the relation between option and stock prices: A convex optimization approach. *Operations Research*, Vol. 50, No. 2, pp. 358–374, 2002.
- [3] A. N. Borodin and P. Salminen. *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*. Birkhäuser, 1996. ISBN: 3-7643-5463-1.
- [4] R.E. Curto and L.A. Fialkow. Recursiveness, positivity and truncated moment problems. *Houston Journal of Mathematics*, Vol. 17, No. 4, pp. 603–635, 1991.
- [5] 藤田岳彦, 高岡浩一郎, 塩谷匡介訳. デリバティブ価格理論入門 -金融工学への確率解析-. シグマベイスキャピタル, 2001. ISBN: 4-916106-51-2.
- [6] K. Helmes, S. Röhl, and R.H. Stockbridge. Computing moments of the exit time distribution for markov processes by linear programming. *Operations Research*, Vol. 49, No. 4, pp. 516–530, 2001.
- [7] J.-P. Imhof. Density factorizations for brownian motion, meander and the three-dimensional bessel process, and applications. *Journal of Applied Probability*, Vol. 21, No. 3, pp. 500–510, 1984.
- [8] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, second edition, 1999. ISBN: 3-540-97655-8.
- [9] 伊藤清. 確率論. 岩波書店, 1991. ISBN: 400007816X.
- [10] M. Kijima. *Stochastic Processes with Applications to Finance*. Chapman & Hall/CRC, 2002. ISBN: 1-58488-224-7.

- [11] J.B. Lasserre and T.P. Rumeau. SDP vs. LP relaxations for the moment approach in some performance evaluation problems. *Stochastic Models*, Vol. 19, No. 1, pp. 1–27, 2003.
- [12] J.B. Lasserre, T.P. Rumeau, and M. Zervos. Pricing a class of exotic options via moments and SDP relaxations. *Mathematical Finance*, Vol. 16, No. 3, pp. 469–494, 2006.
- [13] M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana University Mathematics Journal*, Vol. 42, No. 3, pp. 969–984, 1993.
- [14] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag, 1994. ISBN: 3-540-57622-3.
- [15] J.F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, Vol. 11–12, pp. 625–653, 1999.
- [16] U. Sumita, J. Gotoh, and H. Jin. Numerical exploration of dynamic behavior of ornstein-uhlenbeck processes via ehrenfest process approximation. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 49, No. 3, pp. 256–278, 2006.